Předehra: Intervalové dotazy v pologrupách

$(X, \oplus)$, $\oplus$ je asociativní

příklady: min, +, ·, násobení matic …

(1)

Chceme statickou DS, která pro $x_1 \ldots x_n \in X$ umí rychle vyhodnocovat $x_i \oplus x_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_j$

Df: $f_i(n)$:= kolik prostoru stačí, abychom uměli dotaz vyhodnocovat pomocí i operací $\oplus$

čas na předvýpočet bude vycházet ~stejný

- $f_0(n) = \Theta(n^2)$ … předpočítáme všechno
- $f_1(n)$ … rekurzivní konstrukce [A | B] ($n/2$, $n/2$)
  - dotazy přes střed: px + sx součty (pro B, pro A)
  - ostatní: rekurze na A nebo B

$$f_1(n) = n + 2 \cdot f_1(n/2), \quad f_1(1) = 0 \quad \Big\} \quad f_1(n) = n \log n$$

- $f_2(n)$ … nic zajímavého
- $f_3(n)$ … opět rekurzivně [| | | | |] bloky velikosti b → n/b bloků
  - px + sx v každém bloku
  - f_3 v každém bloku
  - f_1 pro posloupnost součtů bloků

$$f_3(n) = \underbrace{2n}_{\text{px+sx součty}} + \underbrace{f_1(n/b)}_{\text{kompr. bloky}} + \underbrace{\frac{n}{b} \cdot f_3(b)}_{\text{vnitřky bloků}}$$

volbou $b := \log n$ bude $f_1(\frac{n}{b}) \le n$

dotaz: uvnitř 1 bloku → f_3 v bloku ($3\times \oplus$); jinak → sx $\oplus$ f_1 přes celé bloky $\oplus$ px ($3\times \oplus$)

tedy $f_3(n) \le 3n + \frac{n}{\log n} \cdot f_3(\log n)$

$f_3(1) = 0$

n, $\log n$, $\log\log n$, … $\Big\}$ Σ přes každou hladinu $= n$

$$f_3(n) \le 3n \cdot \log^* n$$

- obecně: $f_{2k+1}(n) \le (2k+1)\, n \log^{\overbrace{*\ldots*}^{k}} n$

  [dokážeme indukcí zobecněním postupu pro f_3]

- optimum:

$$\alpha(n) := \min\{k \mid \log^{\overbrace{*\cdots*}^{k}} n \le 2\}$$

pak pro $k = \alpha(n)$ získáme:

Předzpracování v $O(n \cdot \alpha(n))$

Dotaz v $O(\alpha(n))$ ← nutno domyslet, jak vše stihnout (zatím jsme dokázali, že stačí tolikrát vyhodnotit $\oplus$)

příklady:

g	g^*
$n-1$	$n-1$
$n-2$	$n/2$
$n-3$	$n/3$
$n/2$	$\log n$
n/c	$\log_c n$
$\sqrt{n}$	$\log\log n$
$\log n$	$\log^* n$ ☺

Obecně:

pokud pro i operací $\oplus$ stačí prostor $f'(n) = k' n \cdot g(n)$ (lib. neklesající fce), pak pro $i+2$ operací $\oplus$ použijeme $b := g(n)$, z čehož $(n/b) \cdot f'(n/b) \le k'n$, takže:

$$f(n) = kn + \frac{n}{g(n)} \cdot f(g(n)) \qquad k = k'+2$$

$$\Downarrow$$

$$f(n) = kn \cdot g^*(n)$$

kde $g^*(n) = 0$ pro $n \le 1$

$g^*(n) = 1 + g^*(g(n))$ pro $n > 1$

tedy $g^*(n) = \min\{i \mid g^{(i)}(n) \le 1\}$

(def. pro g: $g(n) < n$)

Speciální případy: $\oplus = + \Longrightarrow$ prefixové součty $\overset{\text{Build}}{O(n)} / \overset{\text{Query}}{O(1)}$

$\oplus = \min \longrightarrow$ RMQ $O(n)/O(1)$

dynamické $\rightarrow$ intervalové stromy $\overset{\text{Query}}{O(\log n)} / \overset{\text{Update}}{O(\log n)}$

$O(n)$ ~~init~~ Build

Union-Find Problem

[pův. Tarjan & van Leeuwen 1984, hezčí analýza od Seidela 200x]

- udržujeme ekvivalenci na $\{1 - n\}$
  - začínáme se samými 1prvkovými třídami
  - Union(x,y) slouží třídy obsahující x, y
  - Find(x) zjistí třídu obsahující x (vrátí reprezentanta)
- alternativně: udržujeme komponenty souvislosti grafu, Union přidává hranu

Reprezentace: $\forall$ třídu reprezentujeme stromem orientovaným do kořene ← reprezentant třídy

... vrchol si pamatuje svého otce.

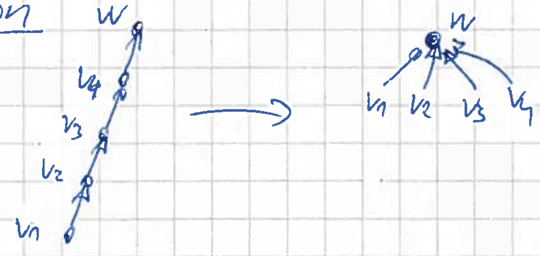
Optimalizace: ① Union by rank ... kořeny si pamatují rank $r(v)$

Pokud $r(u) < r(v)$, pověsíme u pod v,

jinak libovolně, ale novému kořeni zvýšíme rank o 1

Důsledky:
- strom ranku r obsahuje aspoň 2^r vrcholů
- všechny ranky jsou $\leq \log n$
- stromy mají hloubku $\leq \log n$
- Union i Find trvají $O(\log n)$

② Path Compression



kdykoli nějakou cestu projdeme, zkomprimujeme si do ~~..~~ hvězdy

Postupně ukážeme, že Path Compression zaručuje sama o sobě čas $O(\log n)$ amort.

a ① + ② společně budou daleko lepší.

Ceny operací měříme počtem přepojení pointerů cost(op): ← nepočítáme první přiřazení

- Find trvá $O(1 + \text{délka cesty}) = O(1 + \text{cost})$

  Union trvá $O(1)$ + 2x Find, tedy také $O(1 + \text{cost})$.

Trik: Nejprve provedeme všechna spojení stromů, — zde se pointery nepřepojují! (pouze definují)

teprve pak všechny komprese cest (ale vždy se zastavíme ve vrcholu, který původně byl kořenem) — vše podstatné se děje zde

Df: Rozklad ~~stromu~~ lesa na množině vrcholů V je (V_t, V_b) taková, že:
1. $V_t \cup V_b = V$, $V_t \cap V_b = \emptyset$ (rozklad v množinovém smyslu)
2. V_t je "uzavřená nahoru" – tedy otec vrcholu z V_t leží zase ve V_t.

Nápad: Uvážíme nějaký rozklad a sledujeme, jak ho protínají jednotlivé komprese:

komprese uvnitř V_t ⟶ normální komprese $comp(x,y)$
→ cost ≈ délka cesty

vrcholy přijdou uvnitř V_b o otce (cesta se rozpadne) ⟶ speciální komprese $comp(x,\infty)$
→ cost = 0 ... musíme účtovat jinak

Notace:
$\mathcal{F}$ = les na množině vrcholů X
C = posloupnost kompresí
$\|C\|$ = #normálních kompresí v C
$cost(C)$ = celková cena kompresí v C

Obecně nás zajímá, kolik nejvýš může být $cost(C)$ vzhledem k $|X|$ a $\|C\|$.

Lemma: Nechť C je posloupnost kompresí v lese $\mathcal{F}$ na množině X a (X_t, X_b) je rozklad lesa $\mathcal{F}$, indukující lesy $\mathcal{F}_t$ a $\mathcal{F}_b$.

Potom $\exists C_t, C_b$ posloupnosti kompresí pro $\mathcal{F}_t$ a $\mathcal{F}_b$ takové, že:

$$\|C_t\| + \|C_b\| \le \|C\| \quad (*)$$

$$\& \quad cost(C) \le cost(C_t) + cost(C_b) + |X_b| + \|C_t\|. \quad (\#)$$

$-\#roots(\mathcal{F}_b)$ [silnější verze, která se bude hodit později]

Dk: C_t, C_b získáme přímočaře:

1. komprese leží celá uvnitř $\mathcal{F}_t$ → jde do C_t
2. analogicky $\mathcal{F}_b \to C_b$
3. jde napříč ⟶ speciální komprese uvnitř $\mathcal{F}_b$, normální uvnitř $\mathcal{F}_t$

z toho → $(*)$

dokrovnady přispěje k $\|\cdot\|$ 1x

Nyní dokážeme $(\#)$:

$cost(C)$:

T změní otce na T ― ― ― ― ― platíme z $cost(C_t)$

B změní otce na B ― ― ― ― ― platíme z $cost(C_b)$

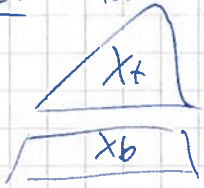
B změní otce na T → poprvé ― ― platíme z $|X_b| - \#roots(\mathcal{F}_b)$ pro silnější verzi

→ znovu ― ― platíme z $\|C_t\|$ (v každé T-kompresi to nastane max. 1x)

Df: $f(m,n) :=$ max. cost libovolné posloupnosti kompresí C t.ž. $\|C\| = m$ na stromu s n vrcholy.

Věta: $f(m,n) \le (m+n) \log n$.

Dk: Indukcí ... rozdělíme X na X_t, X_b velikosti $n/2$



$\|C\| = m$

z lemmatu: $\exists C_t, C_b \quad \|C_t\| + \|C_b\| \leq \|C\|$

$m_t + m_b \leq m$

$\& \quad cost(C) \leq cost(C_t) + cost(C_b) + |X_b| + \|C_t\|$

z indukce: $cost(C) \leq (m_t + n/2) \log n/2 + (m_b + n/2) \log n/2 + n/2 + m_t$

$\leq m(\log n/2 + 1) + n(\log n/2 + 1) = (m+n) \log n.$

Důsledek: Union i Find provedený m-krát na n-prvkové množině trvá celkem $O((m+n) \log n)$.

Nyní přidáme Union by rank

Df: Rankový les je les s funkcí $r: V \to \mathbb{N}$ t.ž.

① $r(v)$ = výška podstromu s kořenem v (měřená v hranách)

② $\forall v \ \forall i = 0, \ldots, r(v)-1 \ \exists w$ syn vrcholu v t.ž. $r(w) = i$.

Union by rank bez komprese cest produkuje rankové lesy
... a kompresi provádíme až dodatečně, takže nepřekáží.

Vrchol ranku r má alespoň r synů, jeho podstrom obsahuje alespoň 2^r vrcholů.

Lemma: Nechť $\mathcal{F}$ je rankový les ~~s kořenem~~ ranku r, s číslo $(0 \leq s < r)$.
(na množině X)

Pak množiny $X_t := \{x \in X \mid r(x) > s\}$ a indukované lesy $\mathcal{F}_t$

a $X_b := \{x \in X \mid r(x) \leq s\}$ $\mathcal{F}_b$

splňují:

① (X_t, X_b) je rozklad lesa $\mathcal{F}$.

② $\mathcal{F}_b$ je rankový les s rankem $\leq s$

③ $\mathcal{F}_t$ je rankový les s rankem $\leq r-s-1$

[④ $|X_t| \leq |X| / 2^{s+1}$] nebudeme potřebovat

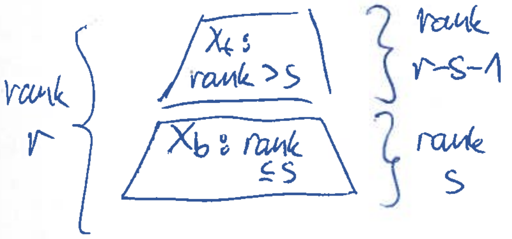
rankem lesa myslíme max. rank kořenů

Počítejme $f(m,n,r) :=$ max. cost posloupnosti m kompresí v lese ranku r s n vrcholy

i po (částečné) kompresi platí, že směrem nahoru ranky ostře rostou

$f(m,n,r) \le (r-1)n$ … přepojením vrcholu vzroste rank otce
$\le (r-1)m$ … cesta má max. $r+1$ vrcholů, takže přepojím max. $r-1$ z nich

Z rozkladu stromu, dostaneme:



$n_t := |X_t|$ $\quad C \longrightarrow C_t \quad m_t := \|C_t\|$

$n_b := |X_b|$ $\quad C \longrightarrow C_b \quad m_b := \|C_b\|$

Podle lemmatu o rozkladu: $n_t + n_b = n, \quad m_t + m_b \le m$

$$\& \quad cost(C) \le cost(C_t) + cost(C_b) + |X_b| - \#roots(\mathcal{F}_b) + \|C_t\|$$

$$\le f(m_t, n_t, r-s-1) + f(m_b, n_b, s) + n - n_t - (s+1)n_t + m_t$$

$\forall v \in X_t$ má ~~…~~ aspoň $s+1$ synů v X_b a jsou to navzájem různé kořeny stromů v $\mathcal{F}_b$

Proto: $\boxed{f(m,n,r) \le f(m_t, n_t, r-s-1) + f(m_b, n_b, s) + n - (s+2)n_t + m_t}$ (*)

Zkusíme rekurzivní krok: Předpokládejme, že $f(\mu,\nu,\varrho) \le k\cdot\mu + \nu\cdot g(\varrho)$

Potom: $f(m,n,r) \le k\cdot m_t + \underbrace{n_t \cdot g(r-s-1)}_{\le n_t \cdot g(r)} + \underbrace{f(m_b, n_b, s)}_{\le f(m_b, n, s)} + n \underbrace{-(s+2)n_t}_{\le -s\cdot n_t} + m_t$

volbou $s := g(r)$: $f(m,n,r) \le (k+1)m_t + f(m_b, n, g(r)) + n \quad \Big/ - (k+1)(\underbrace{m_b + m_t}_{\le m})$

$$\underbrace{f(m,n,r) - (k+1)m}_{\text{označme } \varphi(m,n,r)} \le \underbrace{f(m_b, n, g(r)) - (k+1)m_b}_{\text{toto tedy je } \varphi(m_b, n, g(r))} + n$$

Tedy: $\varphi(m,n,r) \le \varphi(m_b, n, g(r)) + n$
$\downarrow$
$\varphi(m,n,r) \le n \cdot g^*(r)$
$\downarrow$
$f(m,n,r) \le n \cdot g^*(r) + (k+1)m$

Posouvací lemma: Pokud $f(m,n,r) \le km + n\cdot g(r)$, pak také $f(m,n,r) \le (k+1)m + n\cdot g^*(r)$

Důsledek: $f(m,n,r) \le (k+i)\,m + n \cdot g^{\overbrace{*\cdots*}^{i}}(r)$

Kde ale začít? Z triv. odhadu máme $f(m,n,r) \le (r-1)n$

... tedy $k=0$, $g(r)=r-1$ -- jenže $g^*(r)$ je také $r-1$ ↯

První krok tedy uděláme trochu jinak. Vyjdeme z ⊛: (dosadíme triv. mez)

$$f(m,n,r) \le n_t \cdot (r-s-2) + f(m_b,n_b,s) + n - (s+2)n_t + m_t$$

$$\le n_t \cdot (r-2s-4) + f(m_b,n_b,s) + n + m_t$$

$s:=\lfloor r/2 \rfloor$

$$\le f(m_b,n_b,r/2) + n + m_t$$

Známe: $f(m,n,r) - m \le f(m_b,n_b,r/2) - m_b + n$

Tedy: $\boxed{f(m,n,r) \le m + n \cdot \log r}$ ← to již můžeme iterovat

Iterováním: $f(m,n,r) \le (i+1)m + n \cdot \log^{\overbrace{*\dots*}^{i}} r$

Volba i: ① $\alpha(r) := \min\{\, i \mid \log^{\overbrace{*\dots*}^{i}}(r) \le i \,\}$

$$\Rightarrow f(m,n) \le (1+\alpha(\log n))(m+n)$$

② $\alpha(m,n,r) := \min\{\, i \mid \log^{*\dots*}(r) \le m/n \,\}$

$$\Rightarrow f(m,n) \le (2+\alpha(m,n,\log n))\, m$$