

③ každá X_i je antiretězec $\Rightarrow \forall i |X_i| \leq \alpha(P)$

④ existuje řetězec délky $t \Rightarrow t \leq \omega(P)$

↳ proč: zvolme $a_t \in X_t$ libovolně

$a_t \notin X_{t-1}$, proto musí existovat $a_{t-1} \in X_{t-1}$ t.j. $a_{t-1} < a_t$.

$a_{t-1} \notin X_{t-2} \Rightarrow \exists a_{t-2} \in X_{t-2}$ t.j. $a_{t-2} < a_{t-1}$

atd. až do $a_1 \in X_1$.

$\{a_1, \dots, a_t\}$ tvoří řetězec.

z ②-④ plyne: $|X| = \sum_i |X_i| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$, což je tvrzení věty.

Aplikace: Věta (Erdős-Szekeres): Posoupnost čísel délky n^2+1 obsahuje monotónní podposoupnost délky $n+1$.

už jsme zmínili
na začátku
semestru

neustup, tedy nerostoucí
nebo neklesající

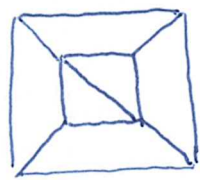
Důk: Mějme $x_1, \dots, x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$.

Na $[n^2+1]$ zvolme relaci $\prec$: $i \prec j \equiv i < j \ \& \ x_i \leq x_j$

① $\prec$ je uspořádání.

② řetězec odpovídá neklesající pp., antiretězec nerostoucí pp.
Stačí aplikovat D&S.

KRESLENÍ GRAFŮ DO ROVINY



definujeme
neformálně,
nemajíce zatím
vybudovanou
analýzu a topologii

- vrcholy $\rightarrow$ body v rovině
- hrany $\rightarrow$ oblouky - spojitě křivky, které samy sebe neprotínají
↳ formálně: spojitá funkce $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ prostá
- "hrany se nekříží"
- pokud vrchol leží na hraně, je její koncový vrchol $\curvearrowright$ nesmí se
- pokud mají 2 hrany společný bod, je to jejich společný koncový vrchol



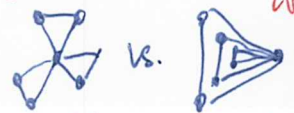
↳ rovinné nakreslení grafu $\rightarrow$ Df: Graf je rovinný $\equiv$ má aspoň 1 rovinné nakreslení.

Df: Topologický rovinný graf $\equiv$ graf spolu s rovinným nakreslením

☺ Nakreslení cesty je oblouk, nakreslení cyklu uzavřená křivka $\leftarrow$ topologická kmenice

Df: Stěny nakreslení $\equiv$ oblasti, na něž dělí rovinu sjednocení nakreslení hran (včetně vnější stěny)
(jako oblouk, ale $f(0) \neq f(1)$)

g-úhel, stěna ... zde žádná vlna



struktura stěn závisí na nakreslení

👁 Nakreslení stromu má vždy 1 stěnu.

Nakreslení lesa také.

Nakres. ostatních grafů má aspoň 2 stěny — (Topolog.) kružnice dělí rovinu na 2 části: vnitřek a vnějšek.

Jordanova věta o kružnici

Tvrzení: V souvislém topolog. grafu je hranice každé stěny nakreslením nějakého uzavřeného sledu.

👁 K_5 není rovinný. Cyklus 1,2,3 je nakreslen jako topolog. kružnice.



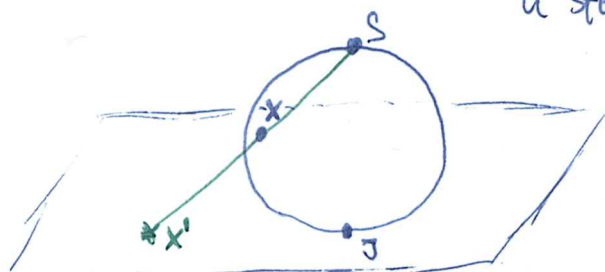
Bůho 4 je uvnitř.

At' už nakreslíme 5 do libovolné stěny, 1 hrana nepůjde nakreslit.

Kreslení na sféru

Věta: G lze nakreslit na sféru $\Leftrightarrow G$ je rovinný.

Dů: Stereografická projekce — spojitá bijekce mezi rovinou a sférou bez 1 bodu



oblast zobrazí na oblouk,
nakreslení na nakreslení;
stěna na stěnu,
vnější stěna na stěnu obsahující S

Důsledek: Můžeme si v rov. nakres. zvolit, která stěna je vnější.

↳ promítneme z roviny na sféru, pak sféru otočíme a promítneme zpět.

Kreslení na další plochy:

válcová plocha — stejně jako rovina

torus ("pneumatika") — jde nakreslit K_5

(a neplatí analogie Jordanovy věty!)

Möbiova páska — dokonce jde K_6

Věta (Eulerova formule):

Je-li G souvislý graf nakreslený do roviny

a $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$, $f = \#$ hran nakreslení,

pak $v + f = e + 2$.

Zafixujeme v , pak

Dů: Indukcí podle e :

① Min. souvislý graf je strom, má $e = v - 1$ a $f = 1$: $v + 1 = v - 1 + 2$ ✓

② Indukční krok $n \rightarrow n+1$: G na $n+1$ vrcholech není strom $\Rightarrow \exists$ hrana na cyklu.

$G' := G - h$ má $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1 \stackrel{IP}{\Rightarrow} v' + f' = e' + 2$

$v + f - 1 = e - 1 + 2$

$\Rightarrow v + f = e + 2$.

Důsledek: Všechna nakreslení téhož grafu mají stejný #stěn.

Df: G je maximální rovinný $\equiv G$ je rovinný & $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G): G+e$ není rovinný.

(31)

Věta: V nakreslené max. rovinného grafu s aspoň 3 vrcholy jsou hranice všech stěn trojúhelníky. $\leftarrow$ takovým grafem se říká rovinne triangulace.

Dk: Necht' G je max. rovinný s nakreslením.

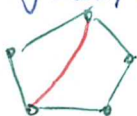
① G je souvislý: jinak lze



nakreslení 1 komponenty vložíme dovnitř stěny jiné komponenty a pak můžeme přidat hranu $\Rightarrow G$ není max. $\downarrow$

② Pokud je stěna ohraničena cyklem, je to Δ :

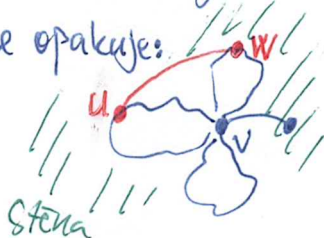
Kdyby to byl C_n pro $n \geq 4$:



můžeme přidat úhlopříčku $\downarrow$

③ Pokud je stěna ohraničena uzavřeným sledem, co není kružnice:

Najdeme vrchol v , který se opakuje:



Odebráním v vznikne víc komponent $\rightarrow$ vyberu u, w z různých komp. a spojuji hranou $\downarrow$

Lemma: V rovinne triangulaci platí $e = 3v - 6$.

Dk: Dosazením do Eulerovy formule:

$$\left. \begin{array}{l} v + f = e + 2 \\ 3f = 2e \end{array} \right\} \begin{array}{l} v + \frac{2}{3}e = e + 2 \\ v - 2 = \frac{1}{3}e \\ 3v - 6 = e \end{array}$$

Věta: Necht' G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholy. Potom $e \leq 3v - 6$. $\left. \begin{array}{l} \text{opět} \\ v = |V(G)|, \\ e = |E(G)|. \end{array} \right\}$

Dk: Přidáváme do G hrany, až vznikne max. rovinný $G' \supseteq G$.

Nakreslení G' je triangulace s $3v - 6$ hranami.

$|E(G)| \leq |E(G')|$, tedy $e \leq 3v - 6$.

Důsledek: K_5 není rovinný: $v = 5, e = \binom{5}{2} = 10$, ale $3v - 6 = 9$.

Důsledek: V rovinném grafu je průměrný stupeň vrcholu < 6 :

$$\frac{\sum_{u \in V(G)} \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{2(3v-6)}{v} = \frac{6v-12}{v} = 6 - \frac{12}{v} < 6.$$

$\left. \begin{array}{l} \text{případy} \\ v < 3 \\ \text{ověříme} \\ \text{zvlášť} \end{array} \right\}$

Důsledek: V rovinném grafu existuje vrchol stupně max. 5.

Rovinné grafy bez Δ pro $v \geq 3$

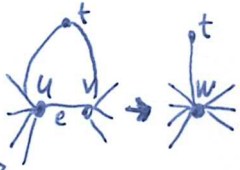
(32)

Maximální grafy: stěny jsou C_4, C_5 , případně celý graf je  (hvězda s alespoň 2 cípy)
 z Eulerovy formule:
$$\left. \begin{aligned} 4f &\leq 2e \\ f &\leq \frac{1}{2}e \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v + \frac{1}{2}e &\leq e + 2 \\ v - 2 &\leq \frac{1}{2}e \end{aligned} \rightarrow \boxed{e \leq 2v - 4}$$
 ← platí také

- Proto:
- ① průměrný stupeň < 4
 - ② existuje vrchol stupně max. 3
 - ③ $K_{3,3}$ není rovinný: $v=6, e=9$, ale $2v-4=8$.

Operace zachovávající rovinnost

Dělení hrany: $G \oslash e$ 
 $V(G \oslash e) := V(G) \cup \{w\}$
 $E(G \oslash e) := E(G) \setminus \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$
↓
dělení
K5 ani K3,3
nemůže být rovinné

Kontrakce hrany $G \cdot e$ 
 $V(G \cdot e) := V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$
 $E(G \cdot e) := (E(G) \cap (V(G) \setminus \{u, v\})) \cup \{x, w\} \mid \{x, u\} \in E(G) \vee \{x, v\} \in E(G)\}$
nebo: $U \setminus \{u, v\} \cup \{w\} \mid e \in E(G), |e \cap \{u, v\}| = 1$
↑ lze ho získat opakováním dělení hran z...

Věta (Kuratowského): G není rovinný $\Leftrightarrow G$ má podgraf izomorfní dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

(zatím bez důkazu)

Poznámka: Dokonce platí G je rovinný $\Leftrightarrow G$ má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow G$ má nakreslení úsečkami.

Problém 4 barev (1852): Politickou mapu jde obarvit 4 barvami tak, aby žádné 2 sousední státy neměly stejnou barvu.
↑ nemulová délka Společné hranice (tj. ne bod)

→ barvíme stěny topologického rovinného grafu tak, aby stěny sousedící hranou neměly stejnou barvu

→ převedeme na barvení vrcholů (spojeny hranou $\Rightarrow$ různé barvy)

Df: Duální graf G^* k topolog. rov. grafu G :

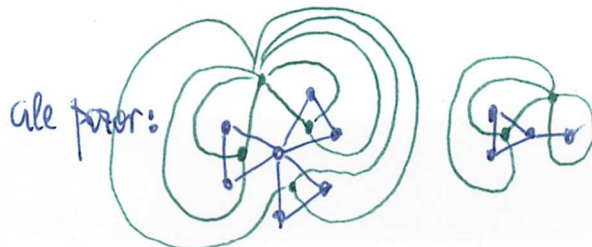
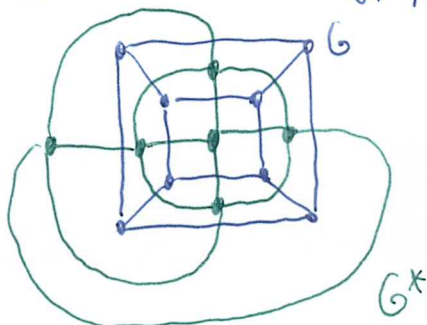
$V(G^*) :=$ stěny G

$\{f, g\} \in E(G^*) \Leftrightarrow$ stěny f, g sousedí v G hranou

→ přeměti: za každou hranu v G přidám hranu do G^* spojující stěny oddělené hranou

 G^* je také rovinný, prohodí se stěny $\leftrightarrow$ vrcholy, hrany se zachovají

Eulerova formule je symetrická vůči $v \leftrightarrow f$



Duál je obecně multigraf se smyčkami a násobnými hranami