

Izomorfismus - "jedna struktura vypadá jako druhá" - potkali jsme pro grafy, teď pořádně a obecně:

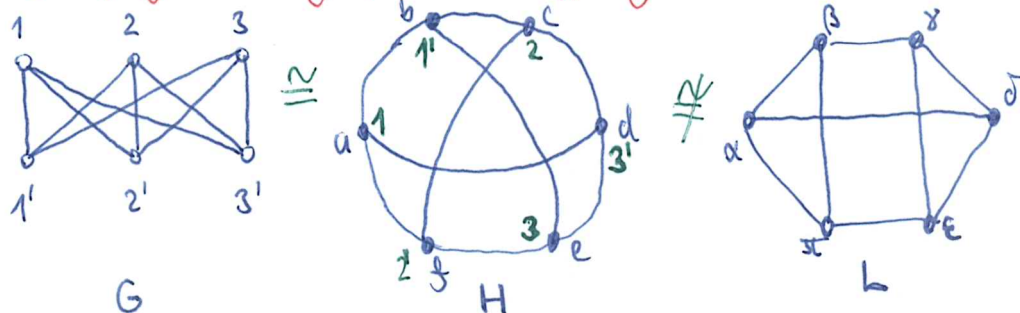
(27)

Df: Grafy $G=(V,E)$ a $G'=(V',E')$ jsou izomorfní (značíme $G \cong G'$) $\equiv$

$\exists f: V \rightarrow V'$ bijekce t.j. $\forall x,y \in V: \{x,y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. f nazýváme izomorfismus mezi G a G'

f říká, jak přejmenovat grafu G vrcholy, aby vznikl G' .

Příklad:



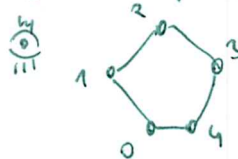
- $G \cong H$ sestrojením izomorfismu
- $G \neq K_5$: mají jiný H vrcholů
- $G \neq K_6$: mají jiné stupně
- $G \neq L$: G je bipartitní, L má Δ

obecně: izomorfismus zachovává všechny vlastnosti, které nezáleží na jménech vrcholů

Pozn: Ověřit, jestli f je izomorfismus, je algoritmicky jednoduché, ale rozhodnout, zda nějaký existuje, je nejspíš těžké.

Df: automorfismus

je izomorfismus G s G .



má kromě identity 9 dalších automorfismů

- Podobně můžeme izomorfismus definovat pro orientované grafy:
 $f: V \rightarrow V'$ bijekce: $\forall x,y \in V: (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E'$.

- Nebo pro uspořádání: $\text{Cum}(X, \leq) \cong (X', \leq') \equiv$
 $\exists f: X \rightarrow X'$ bijekce: $\forall x,y \in X: x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$.

$\hookrightarrow$ Obecněji: $(X, R_1 - R_k) \cong (X', R'_1 - R'_k) \equiv \exists f: X \rightarrow X'$ bijekce

$\uparrow$ množina + k relací na ní
"relační systém"

Například: $(\mathbb{R}, 0, +) \cong (0, \infty, 1, \cdot)$

$\uparrow$ konstanta je unární relace

$\uparrow$ $+ a \cdot$ jsou ternární relace

izomorfismus je $x \mapsto e^x$

kompatibilní s relacemi $R_1 - R_k$, tedy

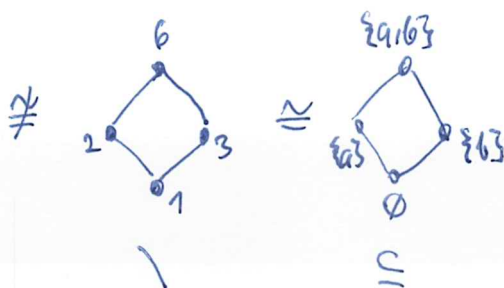
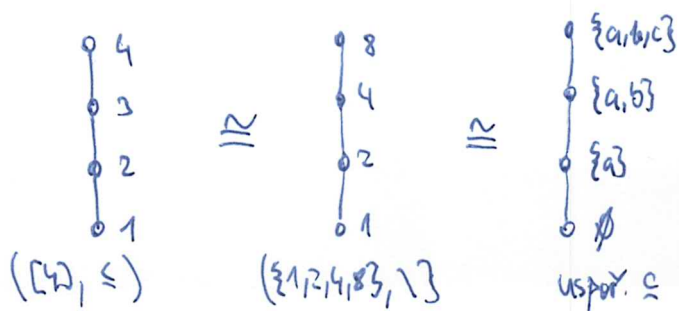
$\forall i \text{ arita}(R_i) = \text{arita}(R'_i) =: a_i$

$\uparrow$ kolika-tice jsou v relaci

$\forall x_1 - x_{a_i} \in X$

$(x_1 - x_{a_i}) \in R_i \Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_{a_i})) \in R'_i$.

zpět k izomorfismům uspořádání:



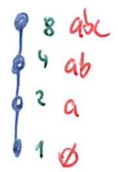
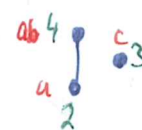
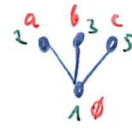
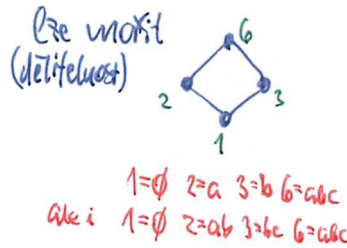
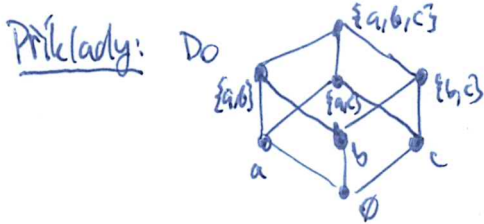
Nebo pro nekonečné čum:

Mezi $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ existují bijekce, ale:

- $(\mathbb{N}^+, \leq) \cong (\mathbb{N}, \leq)$, zatímco
- $(\mathbb{N}, \leq) \not\cong (\mathbb{Z}, \leq)$ - jedna čum má usměrnění prvek, druhá ne
- $(\mathbb{Z}, \leq) \not\cong (\mathbb{Q}, \leq)$ - uspoř. na $\mathbb{Q}$ je husté ($\forall x, y, x < y \Rightarrow \exists z: x < z < y$), zatímco na $\mathbb{Z}$ nikoliv

☺ "Každé uspořádání lze najít někde uvnitř inkluze."

Df. Vnoření $(X, \leq)$ do $(X', \leq')$ je $f: X \rightarrow X'$ prosté
t.č. $\forall x, y \in X: x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$.
} vlastně izomorfismus X
s nějakou indukovanou podstrukturou v X'



Věta (o vložení do inkluze): Pro každou $(X, \leq)$ čum existuje vložení do $(2^X, \subseteq)$.
↑ i nekonečnou

Df. Stačí zvolit $f(x) := L_x = \{y \in X \mid y \leq x\}$ (dolní množiny - už známe)

① f je prostá: pokud $L_x = L_y$, pak z $x \in L_x, y \in L_y$ plyne $x \in L_y$ a $y \in L_x$, tedy $x \leq y$ a $y \leq x$, což dává transitivitou $x = y$.

② $x \leq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$: pokud $a \in L_x$, pak $a \leq x$ a z transitivity $a \leq y$, tedy $a \in L_y$.

③ $f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow x \leq y$: $x \in L_x \Rightarrow x \in L_y \Rightarrow x \leq y$.

Vraťme se ještě k řetězcům a antiretězcům: jak dlouhé mohou být?

Df. Pro konечnou čum $P = (X, \leq)$ je:

- $\alpha(P) := \{ |A| \mid A \subseteq X \text{ je antiretězec} \}$ - "šířka"
- $w(P) := \{ |R| \mid R \subseteq X \text{ je řetězec} \}$ - "výška"

pro "krychličku"
z minulých příkladů je
 $\alpha = 3$
 $w = 4$

Věta (o Dlouhém a Širokém): Pro každou konečnou čum $P = (X, \leq)$ je $\alpha(P) \cdot w(P) \geq |X|$.

Df. Sestrojíme: $X_1 := \text{minimální prvky}(X, \leq), X'_1 := X \setminus X_1$

$X_2 := \text{min. prvky}(X'_1, \leq_1), X'_2 := X'_1 \setminus X_2$

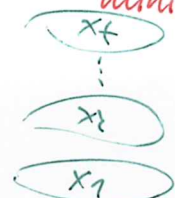
$\vdots$
 $\leq$ omezené na X'_1

X_t takové, že $X'_t = \emptyset$

① proces skončí: $|X'_i| > |X'_{i+1}|$, takže prvky časem dojdou

② $X_1 - X_t$ tvoří rozklad množiny X .

"postupně ukládáme
minima"



"vrstvy"

③ každá X_i je antiretězec $\Rightarrow \forall i |X_i| \leq \alpha(P)$

④ existuje řetězec délky $t \Rightarrow t \leq \omega(P)$

↳ proč: zvolme $a_t \in X_t$ libovolně

$a_t \notin X_{t-1}$, proto musí existovat $a_{t-1} \in X_{t-1}$ t.j. $a_{t-1} < a_t$.

$a_{t-1} \notin X_{t-2} \Rightarrow \exists a_{t-2} \in X_{t-2}$ t.j. $a_{t-2} < a_{t-1}$

atd. až do $a_1 \in X_1$.

$\{a_1, \dots, a_t\}$ tvoří řetězec.

z ②-④ plyne: $|X| = \sum_i |X_i| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$, což je tvrzení věty.

Aplikace: Věta (Erdős-Szekeres): Posoupnost čísel délky n^2+1 obsahuje monotónní podposoupnost délky $n+1$.

už jsme zmínili na začátku semestru

neustup, tedy nerostoucí nebo neklesající

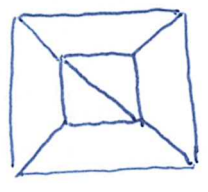
Důk: Mějme $x_1, \dots, x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$.

Na $[n^2+1]$ zvolme relaci $\preceq$: $i \preceq j \iff i \leq j \ \& \ x_i \leq x_j$

① $\preceq$ je uspořádání.

② řetězec odpovídá neklesající pp., antiretězec nerostoucí pp.
Stačí aplikovat D&S.

KRESLENÍ GRAFŮ DO ROVINY



definujeme neformálně, nemajíce zatím vybudovanou analýzu a topologii

- vrcholy $\rightarrow$ body v rovině
- hrany $\rightarrow$ oblouky - spojitě křivky, které samy sebe neprotínají
↳ formálně: spojitá funkce $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ prostá
- "hrany se nekříží"
- pokud vrchol leží na hraně, je její koncový vrchol (nesmí se)
- pokud mají 2 hrany společný bod, je to jejich společný koncový vrchol



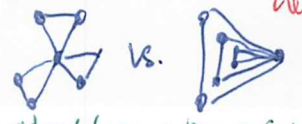
↳ rovinné nakreslení grafu $\rightarrow$ Df: Graf je rovinný $\iff$ má aspoň 1 rovinné nakreslení.

Df: Topologický rovinný graf $\equiv$ graf spolu s rovinným nakreslením

Nakreslení cesty je oblouk, nakreslení cyklu uzavřená křivka $\in$ topologická kreslice

Df: Stěny nakreslení $\equiv$ oblasti, na něž dělí rovinu sjednocení nakreslení hran (včetně vnější stěny)
(jako oblouk, ale $f(0) \neq f(1)$)

g-úhel stěny ... zde žádná vlna



struktura stěn závisí na nakreslení