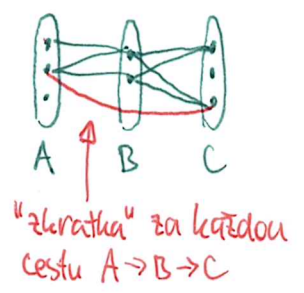


Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B , pak $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ je relace mezi B, A . } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C , pak $R \circ S := \{(a, c) \mid a \in A, c \in C: \exists b \in B: aRb \& bSc\}$

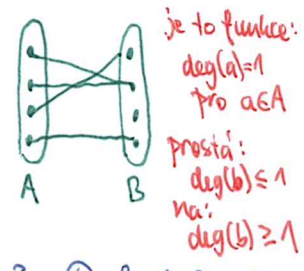


☺ $R \circ id_B = R, id_A \circ R = R$

Df: Funkce z A do B je relace f mezi A a B t.ž. $\forall a \in A \exists ! b \in B: a f b$. } značíme $f: A \rightarrow B$

☺ id_A je identické zobrazení } $f(x) := y$ t.ž. $x f y$ (jednoznačně určeno)

- Df: $f: A \rightarrow B$ je
- prostá $\equiv \forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ (injektivní)
 - na (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$
 - vzájemně jednoznačná (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



- Příklady: ① $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (nebo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) ② $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ (pro $x < 0$ pro $x > 0$) ③ $\text{card}: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (mohutnost množiny (kardinalita)) ④ $f: A \times B \rightarrow C$ (funkce dvou proměnných)

☺ Je-li $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C , kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$ (nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...)

☺ Pro $f: A \rightarrow B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow f$ je bijekce

Df: Relace R na množině A je: Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

- reflexivní $\equiv \forall a \in A: aRa \leftarrow id_A \subseteq R$
- symetrická $\equiv \forall a, b \in A: aRb \Rightarrow bRa \leftarrow R = R^{-1}$
- transitivní $\equiv \forall a, b, c \in A: aRb \& bRc \Rightarrow aRc \leftarrow R \circ R \subseteq R$ příklady: $x < y, x = y$
- antisymetrická $\equiv \forall a, b \in A: aRb \& bRa \Rightarrow a = b \leftarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je ekvivalence $\equiv$ je reflexivní & symetrická & transitivní. Značení: často $\equiv, \approx, \sim, \cong$ apod. "různá rovnítká"

- Příklady:
- ① rovnost na $\mathbb{N}$
 - ② rovnost modulo n
 - ③ geometrická shodnost
 - ④ geom. podobnost
 - ⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\text{card}(X) = \text{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \rightarrow Y$)
 - ⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech $\uparrow$ relace na $V, xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
 - ⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech $\uparrow xRy \equiv \exists$ cesta $x \rightarrow y$ & $\exists$ cesta $y \rightarrow x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid aRx\}$

(24)

nebo $xRa \dots$ to je díky symetrii totéž

☹️ $\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

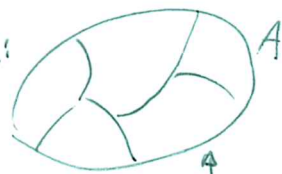
Věta: Necht' R je ekvivalence na množině A .

① $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.

② $\forall x, y \in A$: buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.

③ $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R .

Představa:



↑ ekv. třídy

Důk: ① triviální díky $x \in R[x]$

② ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$... prohozením x, y získáme $R[y] \subseteq R[x]$ a zkombinováním inkluzí rovnost.

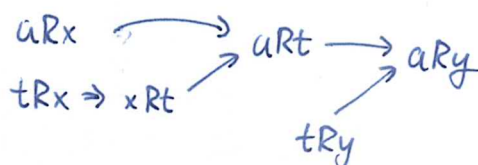
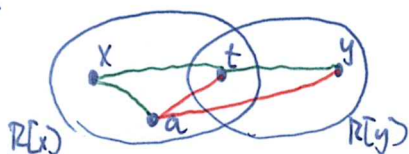
Necht' $t \in R[x] \cap R[y]$ a $a \in R[x]$. Ukážeme, že $a \in R[y]$.

tRx & tRy

tedy aRx

aRy

Obrázek:



③ xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

☹️ Třídy pro naše příklady ekvivalencí: ② rovnost mod $n \rightarrow n$ zbytkových tříd

⑥ neorient. dosažitelnost $\rightarrow$ komponenty souvislosti

⑦ orient. $\rightarrow$ silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$ je rozdělení množiny $X \equiv$

① $\forall A \in \mathcal{Y}: A \neq \emptyset$

② $\forall A, B \in \mathcal{Y}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

③ $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

ekv. třídy tvoří rozdělení,
naopak ke každému rozdělení
vytvoříme ekvivalenci
"být v téže třídě", tedy
 $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{Y}: \{a, b\} \subseteq A$

☹️ Pozor, někdy se více hodí rozdělení dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozdělení V .

Na úlohu: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence - nejsou tranzitivní.

Třeba na $\mathbb{R}$: $xBy \equiv |x-y| \leq 1$. Tehdy $1B2$ a $2B3$, ale $\neg 1B3$.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rovné)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání $\equiv$
 R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

často značíme
 $\leq, \leqslant, \subseteq$ apod.

Df: Prvky $a, b \in A$ jsou porovnatelné $\equiv aRb$ nebo bRa .

Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Df: Částečné uspořádaná množina (ČUM) je dvojice (A, R) , kde A je množina a R uspořádání na A .