Úloha: Chceme ze souvislého grafu odstranit co nejvíce hran, aniž bychom porušili souvislost ⇒ hledáme minimální souvislý podgraf se stejnou množinou vrcholů.

takovým grafům se říká stromy [souvislý & smazáním libovolné hrany se stane nesouvislým

(ukážeme, že všechny kostry mají stejný #hran)

tomu se říká kostra grafu [zjevně existuje – lze ji získat opak. mazáním hran]

Lemma: Graf T je strom ⇔ T je souvislý a acyklický. ← bez kružnic

Dk: Stačí pro T souvislý dokázat: T je min. souvislý ⇔ T je acyklický

tili T není min. souvislý ⇔ T je cyklický.

⇐ pokud T obsahuje cyklus, smazání hrany na cyklu neporuší souvislost

⇒ pokud smazání hrany $e = \{x,y\}$ neporuší souvislost, pak v $T-e$ existuje cesta mezi x,y ... přidáme-li k ní e, máme cyklus v T.

Df: Les je acyklický graf. To jsou grafy, jejichž komponenty jsou stromy.

Df: List je vrchol stupně 1. ← o listech mluvíme i v grafech, které nejsou lesy

Lemma: Každý strom s aspoň 2 vrcholy má list.

Dk: Uvažme nejdelší cestu:

kdyby v nebyl list, vede z něj další hrana. Kam?

na P → máme cyklus ↯

mimo P → P lze prodloužit ↯

[dokonce jsme našli 2 listy] ∎

Lemma: Nechť G je graf a v jeho list. Pak G je strom ⇔ $G-v$ je strom.

$G-v$ = $G[V(G) \setminus \{v\}]$

v důkazu používáme strom ⇔ souvislý acyklický

Dk: ⇒ $G-v$ je podgrafem acyklického grafu G ⇒ je také acyklický

libovolné vrcholy $x,y \neq v$ jsou v G spojené cestou, která neobsahuje v ($\deg(v)=1$), takže tato cesta existuje i v $G-v$. Proto $G-v$ je souvislý.

⇐ G je acyklický: případná kružnice by neobsahovala v ⇒ byla by i v $G-v$

G je souvislý: kdyby nebyl, má aspoň 2 komponenty ⇒ ∃ komponenta bez v, ta musí být i komponentou $G-v$. ∎

Věta: Strom s n vrcholy má $n-1$ hran.

Dk: Indukcí podle n ...

- pro $n=1$ triv. platí
- $n \to n+1$ ... nechť T je strom s $n+1$ vrcholy, $\ell :=$ jeho nějaký list

$T' := T - \ell$ je strom s n vrcholy $\overset{IP}{\Rightarrow}$ má $n-1$ hran

T má o 1 hranu více, tedy n. ∎

Věta: Souvislý graf na n vrcholech s $n-1$ hranami je strom.

Dk: Chceme provést podobnou indukci, ale kde vzít list? V kroku $n \to n+1$: Mějme libovolný graf G s $n+1$ vrcholy a n hranami (souvislý).

Tvrzení: G má alespoň 1 list.

Dk: $|E| = n \Rightarrow \sum_v \deg(v) = 2n \Rightarrow$ průměrný stupeň <2

Proto $\exists l: \deg(l) < 2$ … ale graf je souvislý, takže $\deg(l)$ nemůže být 0.] zde využíváme toho, že $n+1 \geq 2$

Nyní $G' = G - l$ … stále souvislý, n vrcholů, $n-1$ hran $\overset{IP}{\Rightarrow}$ G' je strom $\xrightarrow{\text{lemma}}$ G je strom. ∎

$G = (G') \!-\!\bullet\, l$

Věta: Následující vlastnosti grafu G jsou ekvivalentní:

1. souvislý & acyklický
2. minimální souvislý – souvislý, ale po odebrání lib. hrany už nebude
3. maximální acyklický – acyklický, ale po přidání lib. hrany už nebude
4. souvislý & $|E| = |V| - 1$
5. acyklický & $|E| = |V| - 1$ "Eulerova formule"
6. jednoznačně souvislý – $\forall u,v \in V(G)\ \exists$ právě 1 cesta mezi u, v

Dk: Umíme už ① ⇔ ② ⇔ ④, ostatní necháme jako cvičení.

Důsledky pro kostry: Všechny kostry grafu mají stejný #hran ⇓ je jedno, jestli hledáme minimální souvislý podgraf vzhledem k #hran nebo k inkluzi.

Úloha: Kolik existuje stromů s $V = \{1..n\}$? (neboli kolik koster má graf K_n?)
↳ označme S_n

Věta (Cayleyho formule): $S_n = n^{n-2}$

Dk: Budeme dvěma způsoby počítat pohykosy: uspořádané trojice (T, r, c)

pohykosy ← POstup HYstavby KOřenového Stromu ☺

T ← strom na vrcholech $\{1..n\}$; r ← kořen $r \in V(T)$; c ← očíslování hran: bijekce $[n-1] \to E(T)$

Nechť $P_n :=$ # pohykosů s n vrcholy.

Pak jistě $P_n = \underset{\text{volby } T}{S_n} \cdot \underset{\text{volby } r}{n} \cdot \underset{\text{volby } c}{(n-1)!}$

Jiným způsobem: postupně přidáváme hrany podle c a vytváříme strom T.

- T si představíme zorientovaný směrem ke kořeni.
- kořen je jediný s $\deg^{out}(\_) = 0$, ostatní vrcholy mají $\deg^{out}(\_) = 1$.
- v průběhu stavby máme nějaký podgraf: les stromů orientovaných k jejich kořenům.
- každá další hrana musí vést z nějakého kořene do libovolného vrcholu jiného stromu
- pokaždé spojíme 2 stromy ⇒ v k-tém kroku máme $n-k+1$ stromů.

- # možností v k-tém kroku: $n \cdot (n-k)$

  ↑ cílový vrchol ↑ kořen jiného stromu

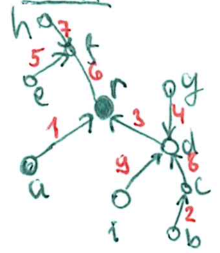
- vynásobením přes všech $n-1$ kroků:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} n\cdot(n-k) = n^{n-1}\cdot(n-1)!$$

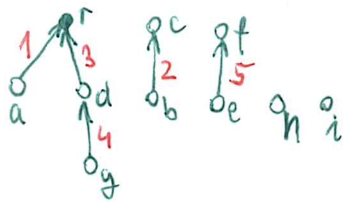
Z toho: $S_n \cdot n \cdot (n-1)! = n^{n-1}\cdot(n-1)!$

tedy: $S_n = n^{n-2}$

Příklad:



před přidáním 6. hrany:



RELACE (zejména binární)

Připomenutí: uspořádané dvojice (x,y)

kartézský součin $X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X, y\in Y\}$

Co udělá $X\times Y\times Z$? Pozor: $(X\times Y)\times Z$ produkuje $((x,y),z)$

ale $X\times(Y\times Z)$ dává $(x,(y,z))$

Konvence: obojí považujeme za alternativní zápisy uspoř. trojice

takže $\times$ můžeme považovat za asociativní

↓

v definici kartézské mocniny $X^n = \underbrace{X\times X\times\ldots\times X}$ nemusíme uvažovat o uzávorkování

Df: (Binární) relace mezi množinami A a B je podmnožina kartézského součinu $A\times B$.

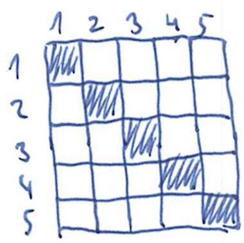
Df: Relace na množině A $\equiv$ relace mezi A a A.

Představa: Je to nějaký vztah mezi prvky A a B

... skříňka, do které vložíme $a\in A$ a $b\in B$ a ona odpoví ANO/NE.

Příklady na množině $A = \{1,2,3,4,5\}$

① rovnost $\{(1,1),(2,2),\ldots,(5,5)\}$



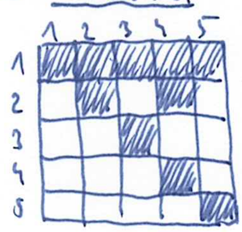
"$a=b$" je vlastně zkratka za $(a,b)\in =$

→ obecně identická relace

$id_A := \{(a,a) \mid a\in A\}$

zvaná též diagonální relace Δ_A.

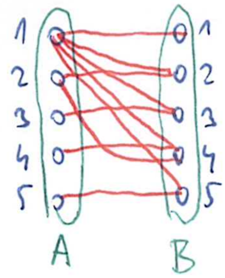
② dělitelnost



$\{(1,1),\ldots,(1,5),$
$(2,2),(2,4),$
$(3,3),$
$(4,4),$
$(5,5)\}$

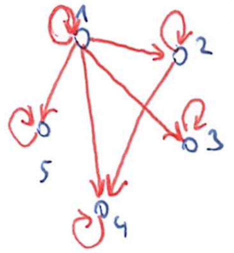
Jiné způsoby kreslení:

a) bipartitní graf

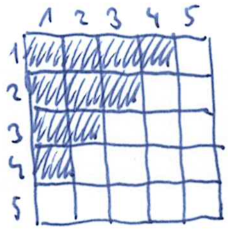


b) orientovaný graf pro relace na A

pozor, dovolujeme smyčky



③ $x+y\leq 5$



④ prázdná relace

$\emptyset$

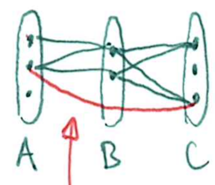
(graf bez hran)

⑤ univerzální relace

$A\times B$ (něco jako úplný graf)

Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B, pak
$R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ je relace mezi B, A. } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C, pak
$R \circ S := \{(a,c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B : aRb \;\&\; bSc\}$



"zkratka" za každou cestu $A \to B \to C$

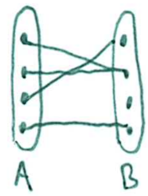
👁 $R \circ id_B = R$, $id_A \circ R = R$

Df: Funkce (neboli zobrazení) z A do B je relace f mezi A a B
t. ž. $\forall a \in A \; \exists! b \in B : afb$. } značíme $f : A \to B$

$f(x) := y$ t. ž. xfy (jednoznačně určené)

👁 id_A je identické zobrazení

Df: $f : A \to B$ je
- prostá (injektivní) $\equiv \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
- na (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$
- vzájemně jednoznačná (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



je to funkce: $\deg(a) = 1$ pro $a \in A$
prostá: $\deg(b) \leq 1$
na: $\deg(b) \geq 1$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ (nebo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ② $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (pro $x<0$, pro $x>0$) ③ $\operatorname{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mohutnost množiny (kardinalita) ④ $f : A \times B \to C$ funkce dvou proměnných

👁 Je-li $f : A \to B$, $g : B \to C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

👁 Pro $f : A \to B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow$ f je bijekce

---

Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

Df: Relace R na množině A je:
- reflexivní $\equiv \forall a \in A : aRa$ $\leftarrow id_A \subseteq R$
- symetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ $\leftarrow R = R^{-1}$
- tranzitivní $\equiv \forall a, b, c \in A : aRb \;\&\; bRc \Rightarrow aRc$ $\leftarrow R \circ R \subseteq R$ příklady: $x<y$, $x=y$
- antisymetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \;\&\; bRa \Rightarrow a = b$ $\leftarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je ekvivalence $\equiv$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní.
Značení: často $\equiv, \approx, \sim, \cong$ apod. "různá rovnítka"

Příklady:
① rovnost na $\mathbb{N}$
② rovnost modulo n
③ geometrická shodnost
④ geom. podobnost
⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\operatorname{card}(X) = \operatorname{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \to Y$)
⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
relace na V, $xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
$xRy \equiv \exists$ cesta $x \to y$ & $\exists$ cesta $y \to x$