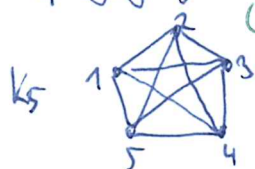


Zpět ke grafům: ukážeme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n ($n \geq 1$)
(kompletní)



$$V = \{1, \dots, n\}$$

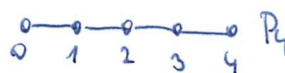
$$E = \left(\frac{V}{2}\right)$$

Prázdný graf E_n ($n \geq 1$)

$$V = \{1, \dots, n\}$$

$$E = \emptyset$$

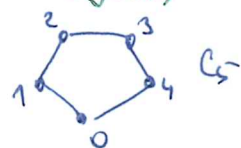
Cesta P_n ($n \geq 0$)



$$V = \{0, \dots, n\}$$

$$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

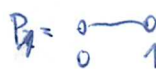
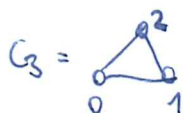
Kružnice C_n ($n \geq 3$)
(cyklus)



$$V = \{0, \dots, n-1\}$$

$$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$$

👁 Některé grafy "vypadají stejně",
i když jsou různé



Df: Grafy G a H jsou izomorfní

$\equiv$ liší se jen označením vrcholů.

} později řekneme pořádně

Už známe: stupně $\deg_G(v)$... Df: Graf je k -regulární pro $k \in \mathbb{N} \equiv \forall v \in V \deg(v) = k$
regulární $\equiv \exists k$: je k -regulární

👁 K_n je $(n-1)$ -regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg., P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Dk: Obě strany počítají "konce hran",
formálněji (v, e) t.č. $e \in E, v \in e$

$\rightarrow$ důsledek: graf obsahuje sudý počet
vrcholů lichého stupně

"princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy!

Podgrafy: Df: Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

$\hookrightarrow$ značíme $G' \subseteq G$

... je indukovaným podgrafem: $V' \subseteq V, E' = E \cap \binom{V'}{2} \leftarrow$ vybereme vrcholy
a zůstávají hrany

$\hookrightarrow G[V'] :=$ podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

👁 Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)

Podgrafy E_n jsou zase jen prázdné.

Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: souvislost: pro každé 2 vrcholy
 $\exists$ cesta, která je spojuje

cesta v grafu

posloupnost vrcholů
a hran

podgraf izomorfní
s P_n pro nějaké n

Nesouvislý graf můžeme rozložit na

komponenty souvislosti $\equiv$ souvislé podgrafy

maximální v inkluzi:

analogicky
kružnice v grafu

Ale pozor, sledy
nejde obecně popsat
jako podgrafy?

$K \subseteq G$ je komponenta $\equiv K$ je souvislý & $\forall K': K \not\subseteq K' \subseteq G$ není souvislý.

☹️ Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má právě 1 komponentu souvislosti. ⚠️ Problematické! kdybychom dovolovali $V=\emptyset$ (19)

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
 $\hookrightarrow$ označme $T(n)$. Pro srovnání: K_n má $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ hran

• Malé případy: $T(1)=0$ • $T(3)=2$  $T(5)=6$  ... lepší než C_5 s 5 hranami
 $T(2)=1$  $T(4)=4$  $T(6)=?$  ... $T(6) \geq 9$

Věta: Pro sudé n je $T(n) = \frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ale to nebudeme dokazovat to je $K_{3,3}$

Dů: ① $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$... graf $K_{n/2, n/2}$ nemá Δ ← Kaib je úplný bipartitní graf:

$$V = \{1-a, 1-b\}$$

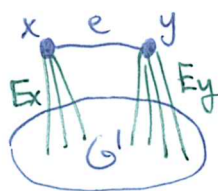
$$E = \{ \{i, j\} \mid 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b \}$$

Obecně: G je bipartitní $\equiv$ vrcholy lze rozdělit na 2 části ("partity"), mezi nimiž nevedou hrany.

② $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ indukci podle n

• $T(2) = 1 = \frac{2^2}{4}$

• $n \rightarrow n+2$: Necht' G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy.
 Zvolme hrany $e = \{x, y\} \in E$ libovolně:



$\hookrightarrow$ označme $G' = (V', E')$
 $G' := G[V']$
 kde $V' := V \setminus \{x, y\}$
 graf bez Δ s n vrcholy

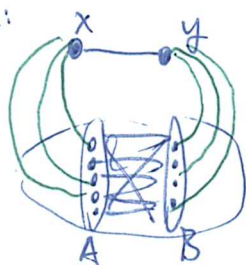
$\} \rightarrow$ podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

• x, y nemohou mít společného souseda $\Rightarrow |E_x| + |E_y| \leq n$

• $E' = E \setminus E_x \setminus E_y \cup \{e\} \Rightarrow |E| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$ ▀

Dokonce: Věta*: Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran)
 jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2, n/2}$.

Dů: Podobná indukce:



← podle IP je to $\approx K_{n/2, n/2}$

$\Rightarrow A \cup \{y\}$ a $B \cup \{x\}$ jsou partity
 grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}}$ ▀

☹️ x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ),
 y do té druhé (nemají spol. souseda)
 ... ale hran musí být n , aby vyšel
 celkový počet $\Rightarrow x$ je spojen
 se všemi vrcholy z A , y se všemi z B
 (obnove)