Příklad: kartičky ČČ ČZ ZZ ... podíváme se na náhodnou kartičku z náhodné strany. Vidíme, že je Č. Jaká je pr., že druhá strana je také Č?

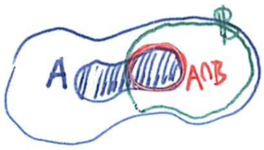
Jak vypadá pr. prostor? $\Omega = \{\underbrace{\underline{Č}Č,\ Č\underline{Č},\ \underline{Č}Z}_{},\ Č\underline{Z},\ \underline{Z}Z,\ Z\underline{Z}\}$, P klasická

nastala 1 z těchto 3 možností, všechny stejně pravděpodobné ... ale jen ve 2 z nich je druhá strana Č $\Rightarrow$ pr $= 2/3$.

$\downarrow$ zobecnění

Df: Podmíněná pr. jevu A za podmínky jevu B je $P(A|B) := P(A\cap B)/P(B)$.

potřebujeme $P(B)\neq 0$.



$A\cap B$ "vysekne podprostor", dělení $P(B)$ srovná pravděp., aby se sečetly na 1.

A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow$ $P(B)=0$ nebo $P(A|B)=P(A)$.] to, jestli nastalo B, nijak neovlivní $P(A)$.

Příklad: Házíme kostkami X, Y. Jaká je pr., že $|X-Y|=1$? jev S – "sousedi"

① Pokud $\underbrace{X\in\{1,6\}}_{\text{jev } E \text{ - "extrémní"}}$, pak je $P(|X-Y|=1)=1/6$ ... $P(S|E)=1/6$

② jindy: $P(S|\bar{E})=2/6=1/3$

víme $P(S\cap E)=\overset{1/6}{P(S|E)}\cdot \overset{1/3}{P(E)} = 1/18$

$P(S\cap \bar{E}) = \underset{1/3}{P(S|\bar{E})}\cdot\underset{2/3}{P(\bar{E})} = 2/9$

ale: $\underset{1/18}{P(S\cap E)} + \underset{4/18}{P(S\cap \bar{E})} = \underset{5/18}{P(S)}$ neboť $S\cap E$, $S\cap\bar{E}$ je rozklad S na disj. podmnožiny

$\rightarrow$ vážený průměr případů, váhy jsou jejich psti. Obecně

Věta: (o úplné pravděpodobnosti, též o rozboru případů).
Nechť $A\subseteq\Omega$, $B_1 - B_k\subseteq\Omega$ je rozklad Ω ($B_i\cap B_j=\emptyset$ pro $i\neq j$, $\forall i\ B_i\neq\emptyset$, $\bigcup_i B_i=\Omega$) t.ž. $\forall i\ P(B_i)\neq 0$.

Pak $P(A) = \sum_i P(A|B_i)\cdot P(B_i)$.

Příklad: Test na nemoc (nebo třeba na spam).

Jevy N = "je nemocný"
T = "test vyšel pozitivně"

Z laboratoře víme:

		Ale:
$P(T\mid N)$ =	0.95	0.95
falešně pozitivní $\rightarrow$ $P(T\mid \bar{N})$ =	0.03	0.03
navíc $P(N)$ =	0.06	0.001

$\rightarrow$ $P(T\cap N) = P(T|N)\cdot P(N) = P(N|T)\cdot P(T)$

$\Rightarrow$ $P(N|T) = \dfrac{P(T|N)\cdot P(N)}{P(T)}$ $\dfrac{0.95\cdot 0.06}{0.0852} \doteq 0.67$

$\doteq 0.0307$!

přičemž $P(T)$ spočítáme rozborem případů:

$P(T) = P(T|N)\cdot P(N) + P(T|\bar{N})\cdot P(\bar{N}) \doteq 0.0852$

$0.95\cdot 0.06 + 0.03\cdot 0.94$ $\doteq 0.0309$

0.001 0.999

$\downarrow$ opět zobecníme

Věta (Bayesova): Pro $A\subseteq\Omega$ jev a $B_1,\dots,B_k$ rozklad Ω t.ž. $\forall i$: $P(B_i)\neq 0$:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)\cdot P(B_i)}{\sum_j \left(P(A|B_j)\cdot P(B_j)\right)}.$$

Hádanka: Hráč A napíše na 100 karet různá celá čísla, "problém najímání sekretářky" (11)
v náhodném pořadí je ukazuje hráči B.
Hráč B může po lib. kartě říci STOP a vyhraje, pokud stopnul na max. čísle.
Jakou má zvolit strategii?

↳ pokus: prohlédneme si prvních 50 a pak zastavíme na 1. větší

strategie uspěje např. tehdy, je-li 2. největší v 1. polovině a největší v 2. polovině
Spočítejme, jakou to má pr.:

$$\frac{50\cdot 50\cdot 98!}{100!} = \frac{50\cdot 50}{100\cdot 99} = \frac{25}{99} = 0.\overline{25} > 1/4$$

} celkově je tedy pr. úspěchu > 1/4

- Jak spočítat pr. úspěchu přesně? vyjde cca 0.349
- Je dělení na 50 + zbytek optimální? pro zjednoduš. výpočet ano, pro přesný je lepší 37 + zbytek → $pr \doteq 0.371$

Hádanka #2: Jak pomocí falešné mince simulovat pravou?

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Příklad: "Problém šatnářky" – n pánů si uloží klobouky do šatny,
Šatnářka jim je vydá v náhodném pořadí.
Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostal svůj klobouk?

↳ Pr. prostor Ω: permutace $\pi: [n] \to [n]$ ← značí se S_n

pán dostal svůj klobouk: $\pi(i) = i$ ← pevný bod permutace

My chceme $P(\{\pi \in \Omega \mid \forall i\ \pi(i) \neq i\})$ ← P(náhodná permutace nemá pevný bod)

↳ Uvažujme malé případy:

n=0	n=1	n=2	n=3	n=5
prázdná π nemá pevný bod → P=1	1 ×	12 ×	123 ×	21453 } 2 rozšíření
		21 ✓	132 ×	21534 } prefixu 21
	p=0	p=1/2	213 ×	
			231 ✓	23154 } ale prefix 23
			312 ✓	23451 } má 3 rozšíření
			321 ×	23514
			$p = \frac{2}{6} = 1/3$	

↳ volby na jednotlivých pozicích se netriviálně ovlivňují

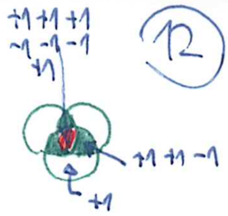
- Pokus: pro n=3 počítáme "špatné" permutace (s pevným bodem):

1xx ... 2
x2x ... 2
xx3 ... 2

} ale třeba 12x jsme započítali 2x
→ odečteme 12x (1), 1x3 (1), x23 (1)
... ale 123 jsme nezapočítali vůbec → +1

- To je vlastně: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



$\downarrow$ zobecníme pro n množin

Věta (Princip inkluze a exkluze) Pro konečné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|.$$

Alternativně:

$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right|$$

[dokážeme za chvíli … teď zpět k šatnářce]

- $A_1 - A_n$: $A_i := \{\pi \in S_n \mid \pi(i) = i\}$ ← i je pevný bod
- $A := \bigcup_i A_i$ ← mají aspoň 1 pevný bod … zajímá nás tedy $|A|$ (přesněji řečeno $n! - |A|$)
- pro PIE potřebujeme: $|A_i| = (n-1)!$

  $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

  $\vdots$

  průnik k množin: $(n-k)!$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \underbrace{\sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!}_{\binom{n}{k} \text{ stejných členů}}$$

$\rightarrow \sum = \frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}} \cdot \cancel{(n-k)!}$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) = n! \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \ldots \pm \frac{1}{n!}\right)}_{P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)}$$

- Nás zajímá jev opačný: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$

  Pro $n \to \infty$ konverguje $P(\overline{A})$ k $\frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \# A_i$, v nichž se vyskytuje x ← $\# i : x \in A_i$

Průniky k množin $\rightarrow 1\times \rightarrow$ přispěje $(-1)^{k+1}$ — to je případ $j = k$

$j > k$ množin $\rightarrow 0\times$

$j < k$ množin $\rightarrow \binom{k}{j}$ j-tic obsahuje x $\rightarrow$ celkem přispějí $(-1)^{j+1}\binom{k}{j}$

Sečtením přes všechna j:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = -\underbrace{\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j}}_{} = 1 \quad \blacksquare$$

kdybychom sčítali od 0, bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty. Tohle chybí $(-1)^0\binom{k}{0} = 1 \rightarrow$ vyjde -1

Druhý důkaz PIE (abstraktnější)

- Zvolme $A := \bigcup_i A_i$ ... každé $X \subseteq A$ přiřadíme charakteristickou funkci
$$c_X : A \to \{0,1\} \text{ t.ž. } c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$
- Vlastnosti char. funkcí:
  - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
  - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}} = 1 - (1-c_X)(1-c_Y)$
  - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$, kde $\overline{X} = A \setminus X$
  - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$
- Roznásobíme $\prod_{i=1}^{n} (1 + \underbrace{x_i}_{\text{proměnné}}) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i \xrightarrow{\text{dosaz. } x_i \leftarrow -x_i} \prod_{i=1}^{n} (1-x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$
- Dosadíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:
$$\underbrace{\prod_{i=1}^{n} (\underbrace{1 - c_{A_i}}_{c_{\overline{A_i}}})}_{c_{\bigcap_i \overline{A_i}} = 1 - c_{\bigcup_i A_i}} = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} c_{A_i}}$$
pro $I \neq \emptyset$ je to $c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$

pro $I = \emptyset$ je to 1
- Upravujeme: (do podoby ještě bližší PIE)
$$\cancel{1} - c_{\bigcup_i A_i} = \cancel{1} - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$
- Nakonec sečteme přes všechna $a \in A$:
$$\left|\bigcup_i A_i\right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left|\bigcap_{i \in I} A_i\right| \quad \text{... ejhle, PIE!}$$

Příbuzná otázka: Kolik pevných bodů má průměrná náhodná permutace?

Model pro podobné otázky:

Df: Náhodná veličina na pr. prostoru je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ← třeba #1 při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jevu $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$

Df: Střední hodnota $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$ ← vážený průměr (váhy = psti)

pro nekonečnou Ω nemusí existovat

$E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a$ ← nelekejte se nespočetné sumy – nejvýše spočetně členů může být nenulových

? $\mathbb{E}$ není medián ? → většina lidí má nadprůměrný #rukou

↑ to je m t.ž. $P(X<m) \le 1/2$
$P(X>m) \le 1/2$

$\mathbb{E}[\#\text{rukou}] < 2 \Rightarrow P(\#\text{rukou} > \mathbb{E}(\dots)) = 1-\varepsilon$

Příklad: 2 kostky, S = součet hodů: $E(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a)\cdot a = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \dots + \frac{6}{36}\cdot 7 + \frac{5}{36}\cdot 6 + \dots + \frac{1}{36}\cdot 12$

↓ ale jde to počítat snáz

Věta (linearita střední hodnoty): Nechť X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

① $\mathbb{E}(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot \mathbb{E}(X)$
② $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

} důkaz rozepsáním dle definice

→ X = hodnota 1. kostky
Y = hodnota 2. kostky
} $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6}(1+2+\_+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$S = X+Y \rightarrow \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2\cdot 7/2 = 7$

A zpět k šatnářce: $B :=$ #pevných bodů (náh. veličina)

$B_1 - B_n$: $B_i(\pi) := \begin{cases} 0 & \\ 1 & \text{pokud } \pi(i) = i \end{cases}$ } indikátor jevu "i je pevný bod"

$B = \sum_i B_i \rightarrow \mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(\sum_i B_i) = \sum_i \mathbb{E}(B_i) \leftarrow \mathbb{E}(B_i) = P(B_i = 1) = \frac{1}{n}$

$= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ještě 1 příklad na indikátory: Posloupnost n hodů mincí … $\Omega = \{0,1\}^n$

Chceme $\mathbb{E}(\underbrace{\#\text{úseků stejných hodnot}}_{U})$

$U_1 - U_n$ … $U_i :=$ indikátor jevu "na pozici i začíná úsek"

U_1 je vždy 1 → $\mathbb{E}(U_1) = 1$

Jinak $U_i = \begin{cases} 0 & \\ 1 & P = 1/2 \end{cases}$ → $\mathbb{E}(U_i) = 1/2$

↑ i-tý hod se liší od $(i-1)$-tého

} $\mathbb{E}(U) = \sum_i \mathbb{E}(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$