Věta (Erdősova–Szekeresova): Posloupnost délky (alespoň) $(r-1)(k-1)+1$ obsahuje rostoucí pp. délky r nebo klesající pp. délky k

Dk: pro x_1 — x_n

def. (a_i, b_i), kde $a_i :=$ délka nejdelší rostoucí pp končící prvkem x_i
$b_i :=$ — " — klesající — " —

Sporem: pokud ∄ dost dlouhá pp., je vždy $1 \leq a_i \leq r-1$, $1 \leq b_i \leq k-1$
$\Rightarrow (r-1)(k-1)$ možných hodnot dvojice, ale $n > (r-1)(k-1)$

Tedy podle principu holubníku $\exists\, i,j: i<j,\ (a_i, b_i) = (a_j, b_j)$

To ale není možné: Buď $x_i < x_j$, ale pak $a_j \geq a_i + 1$
nebo $x_i > x_j$, — " — $b_j \geq b_i + 1$ ↯

Přídavky

- Neexistují dvě mocniny 2 lišící se jen pořadím cifer.
- Wilsonova věta: n je prvočíslo $\Leftrightarrow$ $(n-1)!+1$ je dělitelné n
- Čínská zbytková věta (důkaz holubníkem)
- 3 domečky a 3 studny

KOMBINATORIKA

– KOLIK JE OBJEKTŮ DANÉHO DRUHU?

Příklady:

26 znaků angl. abecedy

① # slov o 8 písmenech z $\{a\text{–}z\} = 26^8$ ← 2 písmenka: 26{  pak pokračujeme indukcí

② … všechna písmena různá: $\underbrace{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 19}_{8 \text{ členů}} = 26^{\underline{8}}$

③ # přesmyček slova KRUTOVLADCE $= 11^{\underline{11}} = 11!$ ← jiný hezký příklad: ZPRACHNIVELOST (2 znaky) či ZUBOLEKARSTVI (nejdelší rozumná) bez opak.

④ # přesmyček slova JEZEVEC … nejdříve $JE_1ZE_2VE_3C = 7!$

- $3! = 6$ způsobů, jak E-čka očíslovat → # přesmyček $\cdot\, 3! = 7!$
⇒ # přesmyček $= \dfrac{7!}{3!}$

↳ technika počítání dvěma způsoby

př. 5 # rozestavení 8 věží (← nerozlišitelných) na šachovnici 8×12, aby se neohrožovaly.

… v každém sloupci právě 1 věž: posloupnost $r_1 - r_8 \in \{1 - 12\}$
(vlastně slovo nad 12-znakovou abecedou)

a všechna r_i jsou navzájem různá → $12^{\underline{8}}$ možností

Jiný pohled: hledám funkce, které přiřazují sloupcům řádky: $f: \{1-8\} \to \{1-12\}$
neboli zobrazení

(6) co kdyby věží bylo jen 5?

Nejprve si je očíslujeme: $8^{\underline{5}}$ možností, jak vybrat sloupce
$12^{\underline{5}}$ možností, jak nezávisle vybrat řádky } $8^{\underline{5}} \cdot 12^{\underline{5}}$ rozestavení

A pak vydělíme 5!. — na konkrétních, prvcích nezáleží

Zobecníme: # k-znakových slov z n-znakové abecedy = n^k — # funkcí z $\{1-k\}$ do $\{1-n\}$

… bez opakování = $n^{\underline{k}}$ — co se stane pro $k=0$, $n=0$, případně $k>n$? — # prostých funkcí

pořadí abecedy (permutací) = $n^{\underline{n}} = n!$ — # bijekcí z $\{1-n\}$ do $\{1-n\}$ ← také se jim říká permutace

neuspořádaných k-tic vybraných z n prvků = $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

Princip kódování: Kolik podmnožin má množina $1\dots n$? (malý případ: $n=2$, $n=3$)

Podmnožinu popíši charakteristickou posloupností $c_1 - c_n \in \{0,1\}$

↑ $A \subseteq \{1-n\}$ — $c_i = \begin{cases} 0 & \dots\ i \notin A \\ 1 & \dots\ i \in A \end{cases}$

podmnožin = # posloupností = 2^n — Příklad pro $n=2$: $00 \to \emptyset$, $01 \to \{2\}$, $10 \to \{1\}$, $11 \to \{1,2\}$

↑ vlastně mám bijekci mezi podmnožinami a posloupnostmi ⇒ je jich stejně

značení: $2^X = \mathcal{P}(X)$

Jiný pohled: charakt. funkce $\{1-n\} \to \{0,1\}$

Argument bijekcí (příklad): Nechť $\mathcal{S} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je sudý}\}$ — notace: $[n] = \{1-n\}$

a $\mathcal{L} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je lichý}\}$ — „Sudé a liché podmnožiny"

Ukážeme bijekci mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ ⇒ $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$ ⇒ jelikož $|\mathcal{S}| + |\mathcal{L}| = 2^n$, musí být obojí 2^{n-1}.

Zvolíme $a \in [n]$, množině X přiřadíme $X \triangle \{a\} = \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{pokud } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{pokud } a \in X \end{cases}$

↑ symetrický rozdíl

☹ Pro liché n funguje jako bijekce doplněk. Ale co pro sudá n?

↳ Sudé množině přiřadím lichou a naopak
inverzní sama k sobě ⇒ je to bijekce mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ ■

Počítáme k-prvkové podmnožiny $[n]$ – to jsou vlastně neuspořádané k-tice z $[n]$

⇒ je jich $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ ← tohle značíme $\binom{n}{k}$ „n nad k" – kombinační číslo
neboli binomický koeficient

také známe jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, což je totéž (ale pozor na případy $k>n$)

V char. posloupnostech: posl. 0/1 délky n, v nichž je právě k jedniček

to by také šlo počítat jako přesmyčky slova $\underbrace{1-1}_{k}\underbrace{0-0}_{n-k}$ — vyjde toto

Vlastnosti kombinačních čísel

$\binom{n}{0}=1$ $\binom{n}{1}=n$ $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ $\binom{n}{n}=1$ $\binom{n}{n-1}=n$ → obecně $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

počítáme prvky, co nejsou v množině

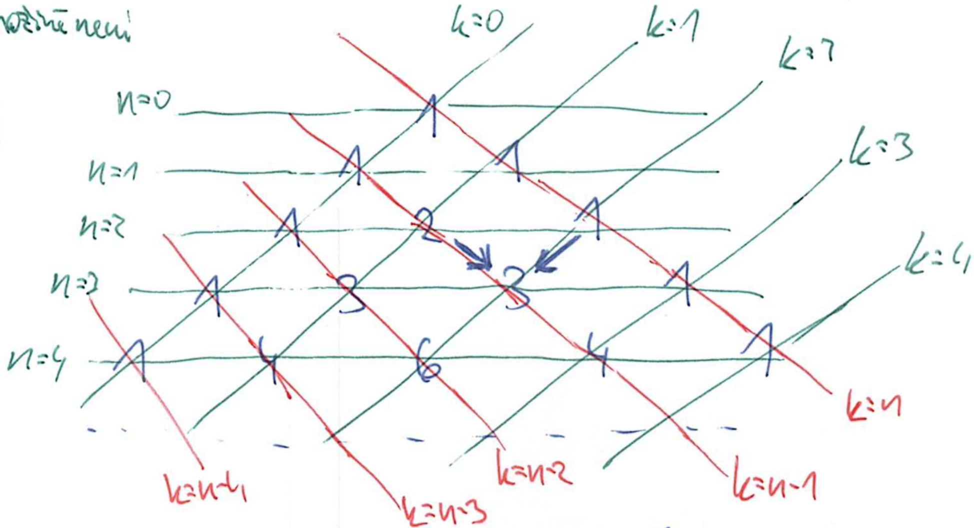
$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ rozebíráme (pod)množiny podle # prvků

$\binom{n}{k}=\underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{prvek } n \text{ v podmnožině není}}+\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{je tam}}$ kombinatorický argument (šlo by též spočítat z definice)

Vše je vidět zde

Pascalův Δ

(tabulka $\binom{n}{k}$)



Binomická věta: $\forall x,y\in\mathbb{R}\ \forall n\in\mathbb{N}$: $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ } také můžeme chápat jako rovnost polynomů ve 2 proměnných

Důkaz: Roznásobujeme $\underbrace{(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n\ \text{závorek}}=\underbrace{xxx\ldots x+xx\ldots xy+\ldots+y\ldots y}$

∀ člen si z ∀ závorky vybere x nebo y
⇒ 2^n členů, ale všechny jsou tvaru $x^{n-k}y^k$

Kolik členů je tvaru $x^{n-k}y^k$? Máme z n závorek k-krát vybrat y → $\binom{n}{k}$. ∎

Otázka: Jak vypadá multinomická věta? Třeba $(x+y+z)^n$?

Příklady: $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_{k}\binom{n}{k}$ … už známe

$0=(1-1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+\ldots\binom{n}{n}$ } sudých a lichých podmnožin je stejně

↑ pro $n>0$

Další zajímavá dosazení?

Rozklady na součet: kolika způsoby lze n zapsat jako $\underbrace{x_1+x_2+\ldots+x_k}_{\text{na pořadí nám záleží}}$ (kde $x_i\in\mathbb{N}$)

|••| |•|••| |

$5=2+0+1+2+0$

Umisťujeme n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných (očíslovaných) přihrádek.

Kódování: posloupnost • a | (krajní nepočítám) ⇒ $n+k-1$ pozic, k z nich je |
⇒ lze vybrat $\binom{n+k-1}{k}$ způsoby.

(• ↑ n, | ↑ $k-1$)