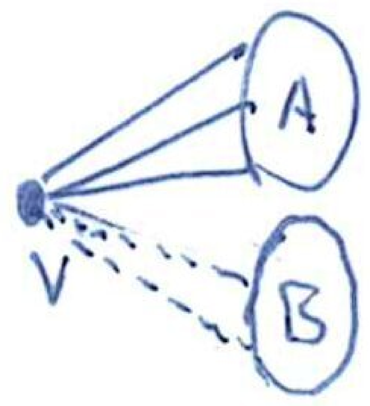
RAMSEYOVA TEORIE

Zpět k příkladu o 6 lidech v tramvaji z úvodní přednášky...

Větička: Každý graf na 6 vrcholech obsahuje buď trojúhelník nebo "antitrojúhelník"

3 vrcholy, mezi nimiž není žádná hrana

Dk: Zvolíme $v \in V$ jakkoli, $A := \{w \in V \mid \{v,w\} \in E\}$,
$B := \{w \in V \mid \{v,w\} \notin E,\ v \neq w\}$



$|A| + |B| = 5 \Rightarrow |A| \geq 3 \vee |B| \geq 3$

buď A obsahuje anti-Δ, nebo obsahuje hranu, kterou vrcholem v doplníme na Δ

buď B obsahuje Δ, nebo anti-hranu, kterou vrcholem v doplníme na anti-Δ

Zobecňujeme: **Df:** Klika v grafu je podmnožina vrcholů, které jsou spojeny každý s každým. } tedy podgraf izomorfní s K_k pro nějaké k

Df: Nezávislá množina (antiklika) je $B \subseteq V$ taková, že mezi vrcholy v B nevedou hrany. } indukovaný podgraf izomorfní s E_l pro nějaké l

Df: Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\overline{G} := (V, \binom{V}{2} \setminus E)$

↳ klika v G $\Leftrightarrow$ nezávislá množina v $\overline{G}$

Viz též klikovost $\omega(G) := \max\{k \mid G$ obsahuje kliku o k vrcholech$\}$
a nezávislost $\alpha(G) := \omega(\overline{G})$ (tedy velikost největší nezávislé množiny)

Věta (Ramseyova o grafech): $\forall k \geq 1\ \forall l \geq 1\ \exists N$ t.ž.
$\forall G$ graf s aspoň N vrcholy obsahuje kliku velikosti k nebo antikliku velikosti l. } tedy $\alpha(G) \geq l$ nebo $\omega(G) \geq k$

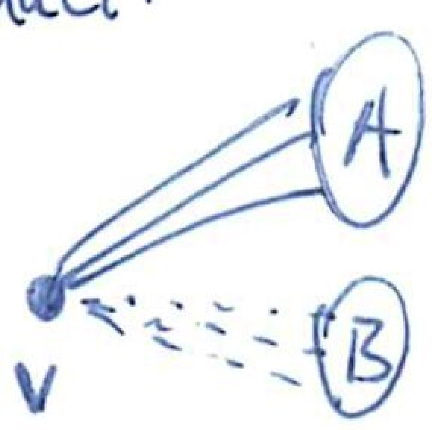
Cesta k důkazu: $N(k,l)$ bude slibená hodnota N pro dané k,l.

Víme $N(k,l) = N(l,k)$ díky doplňkům

$N(k,1) = N(1,l) = 1$

$N(k,2) = k$ ← to nám také vyjde z indukce

Pokus o indukci:



Potřebujeme $|A| \geq N(k-1,l)$ nebo $|B| \geq N(k,l-1)$.

Jak velké N nám to vynutí?

Dáváme předměty do 2 přihrádek, chceme a v první nebo b v druhé
→ musí jich být celkem aspoň $(a-1)+(b-1)+1 = a+b-1$

Stačí $N-1 \geq N(k-1,l) + N(k,l-1) - 1$

$\Rightarrow$ Položením

$$N(k,l) := N(k-1,l) + N(k,l-1)$$

požadavek splníme.

↳ Podle čeho indukujeme? Podle $k+l$.

Teď už víme, že $N(k,l)$ existuje … co to ale je za čísla?

N ($k \backslash l$)	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	
4	1	4	10	20		
5	1	5	15	…		
6	1	6				

← tohle je otočený Pascalův Δ ?

Tvrzení: $N(k,l) = \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$ díky symetrii komb. čísel

$N(1,l) = 1 = \binom{1+l-2}{0}$ ✓

$$N(k,l) = N(k-1,l) + N(k,l-1)$$
$$\binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1}$$
← součtová formule z Pascalova Δ

Důsledek: $N(k,l) \leq 2^{k+l-2}$ … protože $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$, je každé $\binom{n}{k} \leq 2^n$

↳ Je potřeba tolik?

Df: Ramseyovo číslo $R(k,l)$:= nejmenší N, pro něž věta platí pro dané k,l.

R	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	3	6	9	14
4	1	4	9	18	25
5	1	5	14	25	43–46

} triviální případy $R(1,l)=1$, $R(2,l)=l$

5 nestačí: graf C_5

43–46 – přesně nevíme

} známe přesně jen pár hodnot, je hodně těžké je spočítat

Zatím tedy víme: $R(k,l) \leq 2^{k+l-2}$, $\underbrace{R(k,k)}_{\text{často značíme } R(k)} \leq 2^{2k-2} \leq 4^k$

Věta: $R(k,k) \geq 2^{k/2}$.

Dk: Použijeme pravděpodobnostní metodu: zvolíme nějaké n, vytvoříme náhodný graf na n vrcholech (pro každou dvojici vrcholů si nezávisle "hodíme mincí", zda jsou spojeny hranou) a počítáme pravděpodobnost, že je v grafu klika nebo antiklika velikosti k. Pokud je pr. < 1, nutně existuje aspoň 1 graf bez (anti)kliky $\Rightarrow R(k,k) > n$.

To je nekonstruktivní důkaz, konstrukci grafů bez (anti)klik neumíme…

Pro $U \in \binom{[n]}{k}$: Jev A_U := "U indukuje kliku" … $P(A_U) = 2^{-\binom{k}{2}}$

Jev B_U := "U indukuje antikliku" … $P(B_U) = 2^{-\binom{k}{2}}$

Jev C_U := $A_U \cup B_U$ … $P(C_U) = P(A_U) + P(B_U) = 2^{1-\binom{k}{2}}$

$$\underbrace{P\left(\bigcup_U C_U\right)}_{\text{v grafu existuje nějaká (anti)klika}} \leq \sum_U P(C_U) = \underbrace{\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}}_{\text{Jakmile toto bude } <1 \text{, máme vyhráno}}$$

Odhadujeme: $\binom{n}{k} = \frac{n^{\underline{k}}}{k!} \le \frac{n^k}{k!} \le \frac{n^k}{2^{k/2+1}}$

pokud $k \ge 3$

$1-\frac{k(k-1)}{2} = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$

tedy: $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \le \frac{n^k}{2^{k/2+1}} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{n^k}{2^{k^2/2}} = \left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k$

Tato horní mez je <1, kdykoli $n < 2^{k/2}$ ... takže $R(k) \ge 2^{k/2}$.

Mimochodem: Horká novinka [2024]: $\exists \varepsilon > 0 : R(k,k) \le (4-\varepsilon)^k$ ... důkaz dost těžký
Dolní odhad umíme zlepšit jen o polynomiální faktor.

Vícebarevná verze: Barvíme hrany K_n t barvami, chceme jednobarevnou kopii K_k.
↳ pro $t=2$ dostaneme původní větu.

Věta: (Barevná Ramseyova)
$\forall t \ge 1$ (počet barev)
$\forall k \ge 1$ (velikost kliky)
$\exists n$ (jak velký je "dost velký" graf ... BÚNO má právě n vrcholů) — pokud stačí n, jistě stačí i $n+1$ vrcholů
$\forall c: \binom{[n]}{2} \to [t]$ (obarvení hran)
$\exists A \in \binom{[n]}{k}$ (vrcholy kliky)
t. ž. c je konstantní na $\binom{A}{2}$ (klika je jednobarevná)

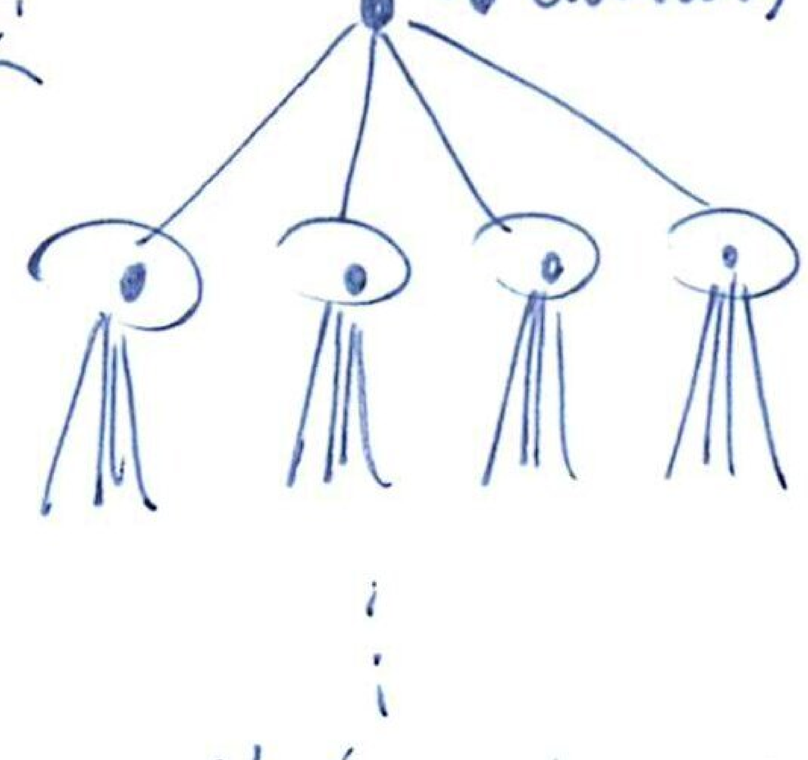
Překvapivě je jednodušší dokázat nekonečnou verzi...

Věta: $\underbrace{\forall t \ge 1}_{\#\text{ barev}}$ $\underbrace{\forall c: \binom{\mathbb{N}}{2} \to [t]}_{\text{obarvení úplného spočetného grafu}}$ $\underbrace{\exists A \subseteq \mathbb{N} \text{ nekonečná}}_{\text{nekonečná klika}}$: $\underbrace{c \text{ je konstantní na } \binom{A}{2}}_{\text{je jednobarevná}}$.

Analogie: Věta (Nekonečný princip holubníku): $\forall t \ge 1$ $\forall c: \mathbb{N} \to [t]$ $\exists A \subseteq \mathbb{N}$ nekonečná t. ž. c je konstantní na A.
↑ řečený též Dirichletův nebo přihrádkový

Dk: Mějme $A_1 \dots A_t$: $A_i := \{x \in \mathbb{N} \mid c(x) = i\}$
Zjevně $\mathbb{N} = \bigcup_i A_i$, takže aspoň jedna A_i je nekonečná. } sjednocení konečně mnoha konečných množin by bylo konečné

Dk:



stavíme nekonečný strom,
v každém vrcholu stromu
jsme vybrali jeden vrchol pův. grafu
Mezi v a jeho potomky vedou hrany stejné barvy
⇒ nekonečná cesta z kořene dolů indukuje 1barev. kliku.

Formálněji:
$A_0 := \mathbb{N}$
pro $i = 1, 2, \dots$: $v_i \in A_i$ zvolíme libovolně (třeba min.)
$B_i^j := \{w \in A_i \setminus \{v_i\} \mid c(\{v_i, w\}) = j\}$
$\{v_i\}, B_i^1, \dots, B_i^t$ tvoří rozklad A_i
⇒ aspoň jedna B_i^j je nekonečná,
tu prohlásíme za novou A_{i+1}
a barvu j za c_i

Takto definujeme A_i pro všechna $i \in \mathbb{N}$, všechny jsou nekonečné

Z v_i vedou do všech v_j, $j>i$ hrany barvy c_i.
V posloupnosti $c_1, c_2, \dots$ je jen konečně mnoho barev $\Rightarrow$ nějaká barva b se opakuje nekonečně-krát } to je nekonečný holubník

Nechť $i_1 < i_2 < \dots$ jsou indexy t.ž. $c_{i_1} = c_{i_2} = \dots = b$.
Tvrdíme, že $A := \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots\}$ je hledaná klika.
Nechť $v_i, v_j \in A$, $i<j$. Potom $c(\{v_i, v_j\}) = c_i = b$. ... vždy tatáž barva. ■

Od nekonečné verze ke konečné.

<u>Věta (konečný princip holubníku)</u>: $\forall t \geq 1 \; \forall k \geq 1 \; \exists n \; \forall c: [n] \to [t] \; \exists A \in \binom{[n]}{k}$: c konstantní na A.
<u>Dk</u>: Stačí zvolit $n := t(k-1)+1$ ... často volíme jednodušší $n := tk$.

<u>Dk konečné barevné Ramseyovy věty</u>:

1. Potřebujeme větev stromu (cestu z kořene dolů), na níž se nějaká barva vyskytne aspoň k-krát.
2. Podle principu holubníku stačí větev délky tk.
3. Ukážeme, že pro dost velké n musí strom obsahovat tak dlouhou větev.

Pokud jako A_{i+1} volíme největší z B_i^j, bude:

$$|A_{i+1}| \geq \frac{|A_i| - 1}{t}$$

Chceme $|A_{tk-1}| \geq 1$ ... to zařídíme splněním $\frac{|A_{tk-2}|-1}{t} \geq 1$, tedy $|A_{tk-2}| \geq t+1$

z toho $|A_{tk-3}| \geq t \cdot (t+1) + 1 = t^2 + t + 1$

Atd. až k $|A_0| = \sum_{i=0}^{tk-1} t^i = \frac{t^{tk}-1}{t-1}$ ... takže stačí $|A_0| \geq t^{tk}$ ... volíme $n := t^{tk}$.

■

My jsme dokázali konečnou verzi úpravou důkazu nekonečné verze.
Dokonce platí, že nekonečná verze implikuje konečnou. Náčrt důkazu:

Špatné obarvení $[n]$:= nemá 1-barevnou kliku velikosti k

Negace konečné věty: existují libovolně velká n, pro něž existuje špatné obarvení $[n]$

↳ musí to nastat pro všechna n, protože zúžením špatného obarvení $[n]$ získáme špatné obarvení $[n-1]$

Ukážeme, že slepením konečných špatných obarvení lze získat nekonečné $\Rightarrow$ spor s nekonečnou verzí věty.

→ Stavíme zakořeněný strom.
Vrcholy na i-té hladině jsou špatná obarvení $[i]$.
Hrany odpovídají rozšíření obarvení.
Každá hladina obsahuje aspoň 1 vrchol
$\Rightarrow$ strom má spočetně vrcholů
$\Rightarrow$ Existuje nekonečná větev stále se rozšiřujících špatných obarvení
(argument stejný jako v důkazu nekonečné věty)
$\Rightarrow$ Sjednocením ("limitou") těchto obarvení je špatné nekonečné obarvení. ■