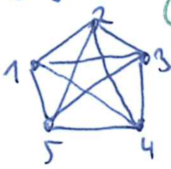
Zpět ke grafům: ukážeme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n ($n \geq 1$) (kompletní)

K_5 

$V := \{1 \ldots n\}$

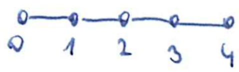
$E := \binom{V}{2}$

Prázdný graf E_n ($n \geq 1$)

$V := \{1 \ldots n\}$

$E := \emptyset$

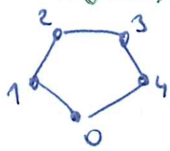
Cesta P_n ($n \geq 0$) — n = #hran (délka cesty)

 P_4

$V = \{0 \ldots n\}$

$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

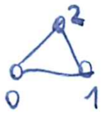
Kružnice C_n ($n \geq 3$) (cyklus)

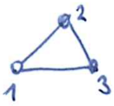
 C_5

$V = \{0 \ldots n-1\}$

$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$

👁 Některé grafy "vypadají stejně", i když jsou různé

$C_3 =$  $K_2 =$ 

$K_3 =$  $P_1 =$ 

Df: Grafy G a H jsou izomorfní ≡ liší se jen očíslováním vrcholů. } později řekneme pořádně

Už známe: • stupeň $\deg_G(v)$ … **Df:** Graf je k-regulární pro $k \in \mathbb{N}$ ≡ $\forall v \in V \ \deg(v) = k$

regulární ≡ $\exists k$: je k-regulární

👁 K_n je $(n-1)$-regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg, P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Dk: Obě strany počítají "konce hran", formálněji (v, e) t.ž. $e \in E$, $v \in e$

→ důsledek: graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně "princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy !

Podgrafy: **Df:** Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E)$ ≡ $V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

↳ značíme $G \subseteq G'$

… je indukovaným podgrafem: $V' \subseteq V$, $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ← vybereme vrcholy a zdědíme hrany

↳ $G[V']$:= podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

👁 Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)

Podgrafy E_n jsou zase jen prázdné.

Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: souvislost: pro každé 2 vrcholy $\exists$ cesta, která je spojuje → cesta v grafu — posloupnost vrcholů a hran; — podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n

analogicky kružnice v grafu

Ale pozor, sledy nejde obecně popsat jako podgrafy!

Nesouvislý graf můžeme rozložit na komponenty souvislosti ≡ souvislé pografy maximální v inkluzi:

$K \subseteq G$ je komponenta ≡ K je souvislý & $\forall K'$: $K \subsetneq K' \subseteq G$ není souvislý.

Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má právě 1 komponentu souvislosti. ‼ Neplatilo by, kdybychom dovolovali $V = \emptyset$

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
↳ označme $T(n)$.

- Malé případy: $T(1) = 0$ • $T(3) = 2$ •—•—• $T(5) = 6$  … lepší než C_5 s 5 hranami
  $T(2) = 1$ •—• $T(4) = 4$  $T(6) = ?$  … $T(6) \geq 9$

toto je $K_{3,3}$

Věta: Pro sudé n je $T(n) = \frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ale to nebudeme dokazovat

Dk: ① $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$ … graf $K_{n/2,\, n/2}$ nemá Δ ← $K_{a,b}$ je úplný bipartitní graf:

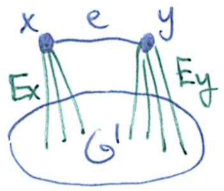
$V := \{1 \ldots a,\ 1' \ldots b'\}$

$E := \{\{i, j'\} \mid 1 \leq i \leq a,\ 1 \leq j \leq b\}$

Obecně: G je bipartitní $\equiv$ vrcholy lze rozdělit na 2 části („partity"), mezi nimiž nevedou hrany.

② $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ indukcí podle n

- $T(2) = 1 = \frac{2^2}{4}$
- $n \to n+2$: Nechť G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy.
  Zvolme hranu $e = \{x, y\} \in E$ libovolně:



→ označme $G' = (V', E')$

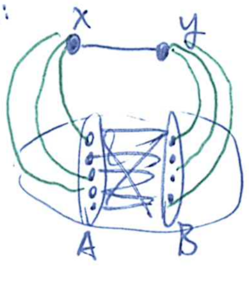
$G' := G[V']$
kde $V' := V \setminus \{x, y\}$
graf bez Δ s n vrcholy

→ podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

- x, y nemohou mít společného souseda $\Rightarrow |E_x| + |E_y| \leq n$
- $E = E' \cup E_x \cup E_y \cup \{e\} \Rightarrow |E| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$. ∎

Dokonce: **Věta*:** Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran) jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2,\, n/2}$.

Dk: Podobná indukce:



← podle IP je to $\cong K_{n/2,\, n/2}$

x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ), y do té druhé (nemají spol. souseda)
∘∘∘ ale hran musí být n, aby vyšel celkový počet $\Rightarrow$ x je spojen se všemi vrcholy z A, y se všemi z B (BÚNO)

$\Rightarrow$ $A \cup \{y\}$ a $B \cup \{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2},\, \frac{n+2}{2}}$ ∎