PRAVDĚPODOBNOST

"Pravděpodobnost, že na kostce padne 6, je rovna $1/6$." – Co to vlastně znamená?

- Empirický pohled: když budu kostkou házet dostatečně dlouho, $\#6 / \#\text{pokusů}$ se bude blížit $1/6$
- Matematický model náhody: pravděpodobnost = $\dfrac{\#\text{ výsledků pokusu, kde jev nastane}}{\#\text{ možných výsledků pokusu}}$
  ↳ první pokus, časem vylepšíme

Začneme příklady…

① kostka … 6 možných výsledků … $P(\text{padne } 6) = 1/6$

$P(\text{padne sudé}) = 3/6 = 1/2$

$P(\text{padne prvočíslo}) = 3/6 = 1/2$

② dvě kostky … $6^2 = 36$ výsledků …
(rozlišitelné, třeba červená a modrá)

$P(\text{na červené padne } 6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{na obou padne totéž}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$P(\text{červená} > \text{modrá}) = \frac{36-6}{2}/36 = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ $\boxed{\cancel{> = <}}$

③ narozeninový paradox
30 lidí v místnosti
předpokládáme, že narozeniny padnou na každý den stejně často a že rok má 365 dní
↳ možné výsledky posloupnosti délky 30 z $\{1 - 365\}$

$P(\text{existuje dvojice s narozeninami v tentýž den})$
$= 1 - \underbrace{P(\text{všichni mají různé narozeniny})}_{\frac{365^{\underline{30}}}{365^{30}} \doteq 0.294} \doteq 0.706$

④ falešná kostka – 6 padne s pstí $1/2$, 1…5 s pstí $1/10$

$P(\text{padne sudé}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$

Zobecníme: **Df:** Diskrétní pravděpodobnostní prostor se skládá z:

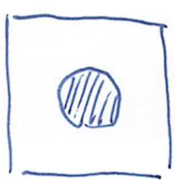
- Ω: konečná nebo spočetná množina elementárních jevů (možné výsledky pokusu)
- $p: \Omega \to [0,1]$ funkce přiřazující elem. jevů jejich pravděpodobnost t. ž. $\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$

Df: Jev je $A \subseteq \Omega$, přiřadíme mu pravděpodobnost $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

striktně vzato, elem. jev není jev … ale můžeme ztotožnit $\omega \in \Omega$ s $\{\omega\}$

Typické případy:
- konečný pr. prostor: Ω konečná
- klasický pr. prostor: $\forall \omega \in \Omega: p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

⑤ Příklad, na který naše definice nestačí:



Kapky deště dopadají náhodně na stolek. Jaká je pr., že kapka dopadne do misky?

Základní obraty: Pro jevy $A, B \subseteq \Omega$:

- $\overline{A} := \Omega \setminus A$ ... doplněk jevu / jev opačný: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $A \cup B$ ... nastane A nebo B: – pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$
  – obecně $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \le P(B)$
- $A \cap B$ ...? platí $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$? Jen někdy (viz úvodní příklady)

1 kostka: "padlo sudé" a "padlo dělitelné 3" } je

1 kostka: "padlo sudé číslo" a "padlo prvočíslo" } nem

2 kostky: "na 1. padla 6" a "na 2. padla 6" } je

Df: Jevy A, B jsou <u>nezávislé</u>, pokud $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$.

Příklad: 32 karet $\{1, \dots, 32\}$, náhodně zamícháme (Ω = všechny permutace karet)

A = "na 1. místě je 1" ... formálněji: $A = \{\pi \in \Omega \mid \pi(1) = 1\}$ $\quad P(A) = \frac{1}{32}$

B = "na 2. místě je 2" $\quad P(B) = \frac{1}{32}$

$P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{31\cdot 32} \neq P(A)\cdot P(B) \rightarrow$ <u>závislé</u>

Příklad: <u>Dvojice pokusů</u>: $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2) \rightarrow (\Omega, P)$, kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P((a,b)) = P_1(a)\cdot P_2(b)$

↑ kartézský součin $= \{(a,b) \mid a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$

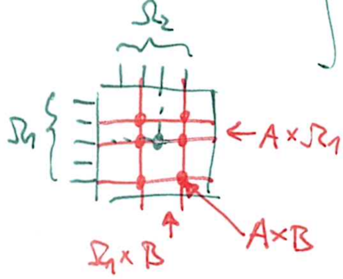
Ověříme, že součet = 1: $\sum_{a\in\Omega_1} \sum_{b\in\Omega_2} P_1(a) P_2(b)$

$$= \sum_{a\in\Omega_1} \Big(P_1(a) \cdot \underbrace{\sum_{b\in\Omega_2} P_2(b)}_{1}\Big) = \sum_{a\in\Omega_1} P_1(a) = 1.$$

} součin pstních prostorů

Jev $A \subseteq \Omega_1$: rozšíříme na $\underbrace{A \times \Omega_2}_{A'}$ ... $P(A \times \Omega_2) = P_1(A)$

Jev $B \subseteq \Omega_2$: —"— $\underbrace{\Omega_1 \times B}_{B'}$ ... $P(\Omega_1 \times B) = P_2(B)$



👁 $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

→ jevy týkající se různých pokusů v sadě jsou nezávislé.

↳ můžeme zobecnit na posloupnost více pokusů ... jak se pak chová nezávislost?

Df: Jevy $A_1 \dots A_n$ jsou <u>po k nezávislé</u> $\equiv \forall I \in \binom{[n]}{k}: P\Big(\bigcap_{i\in I} A_i\Big) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

nejdříve si představíme $k=2$

všechny k-prvkové podmnožiny indexů

Jevy $A_1 - A_n$ jsou <u>nezávislé</u> $\equiv$ jsou po k nezávislé pro všechna $k \in \{2 \dots n\}$.

Příklad: $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, P klasická

$A = \{10, 11\}$ (první je 1) $\quad P(A) = 1/2$

$B = \{01, 11\}$ (druhá je 1) $\quad P(B) = 1/2$

$C = \{00, 11\}$ (#1 sudý) $\quad P(C) = 1/2$

Dvojice: $A\cap B = \{11\}$, $P(A\cap B) = \frac{1}{4} = P(A)\cdot P(B)$
$A \cap C = \{11\}$, $P(A\cap C) = \frac{1}{4}$
$B \cap C = \{11\}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ } po 2 nezávislé

Trojice: $A \cap B \cap C = \{11\}$, $P(A\cap B\cap C) = 1/4$
ale $P(A)\cdot P(B)\cdot P(C) = \frac{1}{8}$ } po 3 nejsou nezávislé

$\Rightarrow A, B, C$ nejsou nezávislé