Věta (Erdősova–Szekeresova): Posloupnost délky (alespoň) $(r-1)(k-1)+1$ obsahuje rostoucí pp. délky r nebo klesající pp. délky k

Dk: pro $x_1 — x_n$

def. (a_i, b_i), kde $a_i :=$ délka nejdelší rostoucí pp končící prvkem x_i

$b_i :=$ — " — klesající — " —

Sporem: pokud $\nexists$ dost dlouhá pp., je vždy $1 \le a_i \le r-1$, $1 \le b_i \le k-1$

$\Rightarrow (r-1)(k-1)$ možných hodnot dvojice, ale $n > (r-1)(k-1)$

Tedy podle principu holubníku $\exists\, i,j:\ i<j,\ (a_i, b_i) = (a_j, b_j)$

To ale není možné: Buď $x_i < x_j$, ale pak $a_j \ge a_i + 1$

nebo $x_i > x_j$, — " — $b_j \ge b_i + 1$ ↯

Přídavky

- Neexistují dvě mocniny 2 lišící se jen pořadím cifer.
- Wilsonova věta: n je prvočíslo $\Leftrightarrow$ $(n-1)!+1$ je dělitelné n
- Čínská zbytková věta (důkaz holubníkem)
- 3 domečky a 3 studny

KOMBINATORIKA

– KOLIK JE OBJEKTŮ DANÉHO DRUHU?

Příklady:

① # slov o 8 písmenech z $\{a–z\}$ = 26^8 ← 2 písmenka:  pak pokračujeme indukcí

26 znaků angl. abecedy

② … všechna písmena různá: $\underbrace{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 19}_{8 \text{ členů}} = 26^{\underline{8}}$

③ # přesmyček slova KRUTOVLADCE = $11^{\underline{11}} = 11!$ ← jiný krátký příklad: ZPRACHNIVELOST (2,1 znaky) či ZUBOLEKARSTVI (nejdelší rozumná bez opak.)

④ # přesmyček slova JEZEVEC … nejdříve $JE_1ZE_2VE_3C = 7!$

• $3! = 6$ způsobů jak E-čka očíslovat $\rightarrow$ # přesmyček $\cdot\ 3! = 7!$

$\Rightarrow$ # přesmyček $= \dfrac{7!}{3!}$

↳ technika počítání dvěma způsoby

př. ⑤ # rozestavení 8 věží (nerozlišitelných) na šachovnici 8×12, aby se neohrožovaly.

... v každém sloupci právě 1 věž: posloupnost $r_1 - r_8 \in \{1-12\}$
(vlastně slovo nad 10-znakovou abecedou)

a všechna r_i jsou navzájem různá → $12^{\underline{8}}$ možností

Jiný pohled: hledám funkce, které přiřazují sloupcům řádky: $f: \{1-8\} \to \{1-12\}$
neboli zobrazení

⑥ co kdyby věží bylo jen 5?

Nejprve si je očíslujeme: $8^{\underline{5}}$ možností, jak vybrat sloupce
$12^{\underline{5}}$ možností, jak nezávisle vybrat řádky } $8^{\underline{5}} \cdot 12^{\underline{5}}$ rozestavení

na konkrétních prvcích nezáleží

A pak vydělíme 5!.

Zobecníme: # k-znakových slov z n-znakové abecedy = n^k — # funkcí z $\{1-k\}$ do $\{1-n\}$

... bez opakování = $n^{\underline{k}}$ — co se stane pro $k=0$, $n=0$, případně $k>n$? — # prostých funkcí

pořadí abecedy (permutací) = $n^{\underline{n}} = n!$ — # bijekcí z $\{1-n\}$ do $\{1-n\}$ ← také se jim říká permutace

neuspořádaných k-tic vybraných z n prvků = $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

Princip kódování: Kolik podmnožin má množina $1 \ldots n$? (malý případ: $n=2$, $n=3$)

Podmnožinu popíši charakteristickou posloupností $c_1 - c_n \in \{0,1\}$

$A \subseteq \{1-n\}$ — $c_i = \begin{cases} 0 & \ldots\ i \notin A \\ 1 & \ldots\ i \in A \end{cases}$

podmnožin = # posloupností = 2^n — Příklad pro $n=2$: $00 \to \emptyset$, $01 \to \{2\}$, $10 \to \{1\}$, $11 \to \{1,2\}$

vlastně mám bijekci mezi podmnožinami a posloupnostmi ⇒ je jich stejně

značení: $2^X = \mathcal{P}(X)$

Jiný pohled: charakt. funkce $\{1-n\} \to \{0,1\}$

notace: $[n] = \{1-n\}$

Argument bijekcí (příklad): Nechť $\mathcal{S} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je sudý}\}$
a $\mathcal{L} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je lichý}\}$ — "sudé a liché podmnožiny"

Ukážeme bijekci mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ ⇒ $|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}|$ ⇒ jelikož $|\mathcal{S}| + |\mathcal{L}| = 2^n$, musí být obojí 2^{n-1}.

Zvolíme $a \in [n]$, množině X přiřadíme $X \triangle \{a\} = \begin{cases} X \cup \{a\} & \text{pokud } a \notin X \\ X \setminus \{a\} & \text{pokud } a \in X \end{cases}$
← symetrický rozdíl

Pro liché n funguje jako bijekce doplněk. Ale co pro sudé n?

↳ Sudé množině přiřadím lichou a naopak
inverzní sama k sobě ⇒ je to bijekce mezi $\mathcal{S}$ a $\mathcal{L}$ ∎

Počítáme k-prvkové podmnožiny $[n]$ – to jsou vlastně neuspořádané k-tice z $[n]$

⇒ je jich $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$ ← tohle značíme $\binom{n}{k}$ "n nad k" – kombinační číslo
neboli binomický koeficient

též známe jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$, což je totéž (ale pozor na případy $k>n$)

V char. posloupnostech: posl. 0,1 délky n, v nichž je právě k jedniček
to by také šlo počítat jako přesmyčky slova $\underbrace{1 \ldots 1}_{k}\underbrace{0 \ldots 0}_{n-k}$ — vyjde toto

Vlastnosti kombinačních čísel

$\binom{n}{0}=1 \quad \binom{n}{1}=n \quad \binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2} \quad \binom{n}{n}=1 \quad \binom{n}{n-1}=n \to$ obecně $\binom{n}{n-k}=\binom{n}{k}$

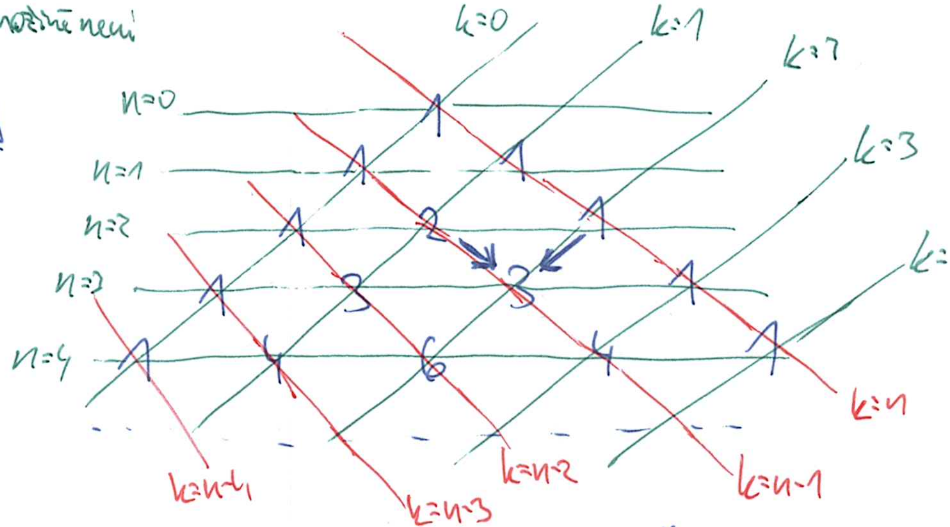
počítáme prvky, co nejsou v množině

$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$ rozebíráme (pod)množiny podle # prvků

$\binom{n}{k}=\underbrace{\binom{n-1}{k}}_{\text{prvek } n \text{ v podmnožině není}}+\underbrace{\binom{n-1}{k-1}}_{\text{je tam}}$ kombinatorický argument (šlo by též spočítat z definice)

Vše je vidět zde

Pascalův △ (tabulka $\binom{n}{k}$)



Binomická věta: $\forall x,y \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N}: (x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ } také můžeme chápat jako rovnost polynomů ve 2 proměnných

Důkaz: Roznásobujeme $\underbrace{(x+y)(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)}_{n \text{ závorek}} = \underbrace{xxx\ldots x + xx\ldots xy + \ldots + y\ldots y}$

$\forall$ člen si z $\forall$ závorky vybere x nebo y $\Rightarrow$ 2^n členů, ale všechny jsou tvaru $x^{n-k}y^k$

Kolik členů je tvaru $x^{n-k}y^k$? Máme z n závorek k-krát vybrat $y \to \binom{n}{k}$. ■

Otázka: Jak vypadá multinomická věta? Třeba $(x+y+z)^n$?

Příklady: $2^n=(1+1)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}1^k=\sum_k\binom{n}{k}$ ... už známe

$0 \stackrel{\text{pro } n>0}{=} (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^{n-k}(-1)^k=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\ldots+\ldots\binom{n}{n}$ } sudých a lichých podmnožin je stejně

Další zajímavá dosazení?

Rozklady na součet: kolika způsoby lze n zapsat jako $\underbrace{x_1+x_2+\ldots+x_k}_{\text{na pořadí nám záleží}}$ ($\forall i\ x_i \in \mathbb{N}$)

|●●| |●|●●| |

$5 = 2+0+1+2+0$

Umisťujeme n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných (očíslovaných) přihrádek.

Kódování: posloupnost ● a | (krajní nepočítám) $\Rightarrow$ $n+k-1$ pozic, k z nich je |
(n kuliček, $k-1$ přepážek) $\Rightarrow$ lze vybrat $\binom{n+k-1}{k}$ způsoby.