Úvodem

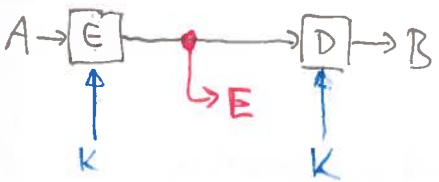
- cíle: • přehled o kryptografii teoretické i praktické!
  - → kryptografická primitiva
  - → protokoly
  - → implementační otázky
  - • cílem je rozumět existujícím protokolům … a vědět dost o návrhu vlastních, abychom to nechtěli dělat :-)
- nebudeme budovat hlubokou teorii (→ Foundations of Theor. Crypt. & ledacos z MMIB)
  … ale občas nějakou větu dokážeme :-)
- o obtížnosti návrhu bezpečných systémů (a vývoje SW obecně)
  → náhodný uživatel vs. zlomyslný uživatel → weakest links, attack trees
- prerekvizity (tak trochu): algoritmy, architektura HW, algebra, složitost…

Primitiva

1) Scénář: • Alice chce posílat Bobovi šifrované zprávy

→ to obecně nejsou konkrétní osoby, ale role v protokolu
- → posílání oběma směry (prohození rolí)
- → Bob může být třeba Alice v budoucnosti

- Eva poslouchá [< eavesdropping]
- Mallory data upravuje (ale o tom později) — The Man in the Middle



- hodí se E a D parametrizovat klíčem
- Kerckhoffsův princip: tajný má být klíč, ne algoritmus!

Rationale: ② je-li šifra veřejně známá, bývá lépe otestovaná ②
③ - vyměnit kompromitovaný klíč je snazší než algoritmus
① dobrých šifer je málo a je těžké je vytvořit

→ symetrická šifra (E i D používají stejný klíč)

šifra obvykle nemůže utajit délku zprávy.
↓
typ. sym. šifra délku zachovává
↓
formálně:

$E: \{0,1\}^n \times \{0,1\}^k \to \{0,1\}^n$

$D:$ — " —

$\forall K \, \forall X \;\; D(X, E(X,K)) = X$

& pro náhodný klíč se $E(-,K)$ chová jako náhodná permutace na $\{0,1\}^n$

příklad: Caesarova šifra

② Asymetrická šifra

- zvlášť šifrovací a dešifrovací klíč
- typické aplikace:
  → N lidí komunikujících navzájem
    - šifrovací klíč je veřejný
    - dešifrovací je tajný
    - problémy s distribucí klíčů!
  → digitální podpisy
    - šifrovací klíč tajný, dešif. veřejný
    - každý může podpis ověřit, ale jen 1 osoba vytvořit

③ Hešovací funkce : $\{0,1\}^* \to \{0,1\}^b$ (třeba $b = 256$)

"dostatečně náhodná"

Chceme: • nemožnost inverze
• nemožnost nalezení kolize

- typické aplikace: → kompaktnější podpisy (nechceme kolize!)
  → Message Auth Code (symetrická verze podpisu)

④ Náhodné generátory

Chceme: • nepredikovatelnost
• neovlivnitelnost

- aplikace: → hybridní šifra ze symetrické a asymetrické
  → challenge-response autentikace

Společné cvičení: protokol pro aukci (viz Surfer)
→ padding
→ timestamps / seq. numbers (proti replayování)
→ nonce (proti porovnávání šifrovaných zpráv)
→ session ID (proti replayi jiné instance protokolu)

Modely útoku - proti komu se bráníme ← DÚ: házení mincí po telefonu ↓ commitment pomocí hes. fcí
- jak dlouho musí tajemství vydržet

Typy útoků
- known ciphertext (chceme plaintext)
- known plaintext (chceme klíč)
- chosen plaintext } též chceme klíč
- chosen ciphertext & known plaintext
- rozlišovací útoky

Jak měřit obtížnost útoku? → security level

"Narozeninové" útoky

① Challenge-response autentikace, n různých noncí
... kolik pokusů v průměru potřebujeme, než se nonce zopakuje?

$$\Pr[\text{náhodná } f \text{ z } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{pokusy}}}{[m]} \text{ do } \underset{\substack{\uparrow \\ \text{nonce}}}{[n]} \text{ je prostá}]$$

$$= \frac{\#\text{ prostých fcí}}{\#\text{ všech fcí}} = \frac{n^{\underline{m}}}{n^m} = 1 \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\frac{m-1}{n}\right)$$

Jelikož $1-x \approx e^{-x}$, aproximujeme $1 \cdot e^{-\frac{1}{n}} \cdot e^{-\frac{2}{n}} \cdot \ldots \cdot e^{-\frac{m-1}{n}}$

$$= e^{-\frac{1+2+\ldots+m-1}{n}} = e^{-\frac{m(m-1)}{2n}}$$

Chceme $\Pr[\text{kolize}] = \frac{1}{2}$ → $e^{-\frac{m(m-1)}{2n}} = \frac{1}{2}$ ⇒ $\frac{m(m-1)}{n} = \underbrace{-2 \ln \frac{1}{2}}_{\approx 0.7} \doteq 1.38$

⇒ přibližně $m \approx \sqrt{n}$ ⇒ security level je poloviční!

② <u>Protokol</u>: • A zvolí náhodný klíč (& pošle ho zašifrovaně asym. šifrou)
- A pošle uvítací zprávu podepsanou klíčem
- další zprávy podepsané stejně

↓ z množiny velké n

<u>Útok</u>: Eva si předpočítá podpisy uvítací zprávy pro a náh. klíčů.
Pak poslouchá m relací a čeká, až se objeví předpočítaný klíč

<u>Model</u>:

$$\Pr[f \text{ se netrefí do } A] = \left(1-\frac{a}{n}\right)^m \approx e^{-\frac{am}{n}}$$

... to je konstanta pro $n \approx am$.

⟶ trade-off mezi časem na předvýpočet a délkou útoku.

! Pozor, security level je vždy 2x menší, než bychom čekali **!**

<u>Jednorázové klíče</u> – Vernamova šifra (a.k.a. One-Time Pad)

- zpráva $x \in \{0,1\}^n$, klíč <u>náhodný</u> $k \in_R \{0,1\}^n \rightarrow x \oplus k \in \{0,1\}^n$ $E(x,k)$
  - E a D jsou tatáž funkce
  - výsledek je posloupnost n nezávislých náhodných bitů!
    ... ovšem korelovaných s klíčem
- Jiná podobná konstrukce: $x \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $k \in \mathbb{Z}_{2^n}$, $\left.\begin{array}{l} E(x,k) = x+k \\ D(y,k) = y-k \end{array}\right\} \text{v } \mathbb{Z}_{2^n}$

  ↑ funguje v jakékoli grupě

👁 $\forall y\ \forall x\ \exists!\, k: E(x,k) = y$

$\Rightarrow \Pr_k[D(y,k) = x]$ je pro všechna x stejná

$\Rightarrow$ y nenese žádnou informaci o x (kromě délky)

} Df. perfektní bezpečnosti

⟶ k čemu je to dobré? ⟶ <u>code books</u>

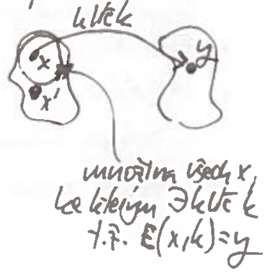
<u>Ale pozor</u>:
- nesmíme nikdy zopakovat klíč (viz Sověti ve WW2)
- útočník může zprávu triviálně měnit

Věta: Pokud # klíčů < # zpráv, šifra není perfektně bezpečná.

Dk: Nechť $y \in \{0,1\}^n$.

Pak $\exists x, x' \in \{0,1\}^n : \exists k : E(x,k) = y$

ale $\forall k' : E(x',k') \neq y$



Proto $Pr_k[D(y,k) = x] > 0$,

ale $Pr_k[D(y,k) = x'] = 0$

$\Rightarrow$ rozdělení není rovnoměrné.

Dělení tajemství (aneb o šílených generálech)

① $x \to x^1, x^2$ t.ž. samotné x^i mi neřekne nic o x (kromě délky), ale x^1, x^2 dohromady určí x jednoznačně.

Řešení: x^1 náhodné, $x^2 := x \oplus x^1$.

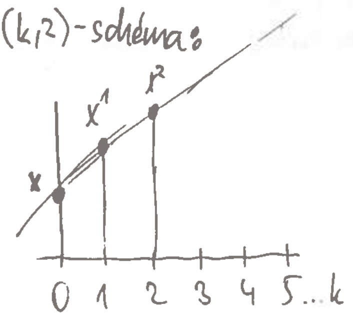
② $x \to x^1, \dots, x^k$ t.ž. všech k částí určí x jednoznačně, žádných $k-1$ nic neprozradí.

Řešení: $x^1 \dots x^{k-1}$ náhodné, $x^k := x \oplus \bigoplus_{i=1}^{k-1} x^i$.

Obecně: **(k,l)-prahové schéma** rozděluje zprávu na k částí tak, že
- libovolných l částí určí celé x,
- žádných $l-1$ nic neprozradí.

$\Rightarrow$ pomocí ② sestrojíme (k,k)-schéma.

③ $(k,2)$-schéma:



Hledám $f(t) = at + b$

t.ž. $f(0) = x$, $f(1)$ je náhodná } takové f existuje právě 1

a pak volím $x^1 = f(1), \dots, x^k = f(k)$

aby to bylo dobře def., počítám v konečném tělese (dost velkém)

libovolná dvě x^i, x^j jednoznačně určí f, ale pokud znám jen x^i, všechna x jsou stejně pravděpodobná (každému odpovídá právě jedna f).

④ Obecné (k,l) - schéma

- f bude polynom stupně menšího než l nad konečným tělesem
- $f(0) = x$, $f(1)$ až $f(l-1)$ volím náhodně } to jednoznačně určí f (& všechny f jsou stejně pravděpodobné!)
- rozdám části $f(1)$ až $f(k)$

→ pokud znám l částí, určím jednoznačně f a najdu $f(0)$

→ pokud znám $c < l$ částí: pokud libovolně nastavím dalších $l-c-1$ částí, každá volba x určí právě jeden f
→ všechna x jsou stejně pravděpodobná

Lemma: Pokud p je polynom s kořeny $\alpha_1 - \alpha_t$, pak
$p(x) = (x-\alpha_1) \cdot \ldots \cdot (x-\alpha_t) \cdot q(x)$ pro nějaký polynom q bez kořenů.

Věta: Polynom (nenulový) stupně d má nejvýše d kořenů.

Důsledek: Pokud p, q jsou polynomy stupně menšího než d
a $p(x_i) = q(x_i)$ pro (nějaká) navzájem různá $x_1 - x_d$, pak $p = q$.

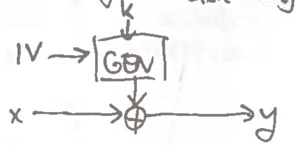
Věta (Lagrange): $\forall\, x_1 - x_d$ navzájem různá $\forall\, y_1 - y_d$
$\exists p$ polynom stupně $< d$ t.ž. $\forall i\; p(x_i) = y_i$.

↳ z předchozího víme, že je jednoznačný.
⇒ máme bijekci mezi polynomy stupně $< d$
a vektory $(f(x_1), \ldots, f(x_d))$
pro libovolná pevná navzájem různá $x_1 - x_d$.

SYMETRICKÉ ŠIFRY

Dva základní druhy → proudové (stream ciphers), blokové (block ciphers)

Proudové: generují keystream, se kterým se data XORují



(vlastně Vernamova šifra s pseudonáhodným generátorem)

- $D = E$ (inverzní sama k sobě)
- nesmíme opakovat nonci
- znegování y_i zneguje x_i
- E_k, $E_{k'}$ komutuje

Více později.

Blokové:

- šifrují bloky pevné délky b
  $E: \{0,1\}^b \times \{0,1\}^k \to \{0,1\}^b$
  Často značíme $E_K: \{0,1\}^b \to \{0,1\}^b$
- E_K musí být invertibilní: je to permutace na $\{0,1\}^b$
- delší zprávy šifrujeme po blocích (TODO)

Triviální příklady

- Caesarova šifra má 1znakové bloky, permutace je cyklický posun abecedy o klíč.
  - Bug #1: málo klíčů → triviální brute-force útok
  - Bug #2: krátké bloky, nulová interakce mezi nimi → frekvenční analýza
- Vigenèrova šifra: víceznakové bloky, opět přičítám klíč.
- obecné permutace abecedy nebo větších bloků

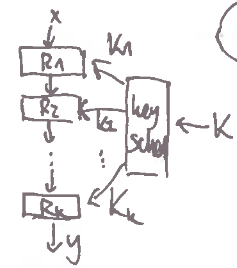
na tohle se dá dívat i jako na proudové šifry

Bezpečnost blok. šifer

- Těžké definovat formálně (buď to umí útoky obejít, nebo definici nesplňuje žádná rozumná šifra)
- Idea: šifru nelze efektivně rozlišit od náhodné permutace
  - verifikátor dostane orákulum buď s E_K pro náhodný K, nebo s náhodnou permutací
  - má odpovědět, které orákulum dostal
  - může pokládat více dotazů
  - chceme, aby nešla dosáhnout Pr úspěchu $\geq 2/3$ s lepší složitostí než $\sim 2^{\text{security level}}$
    co to je?
- Tohle nepokrývá chosen-key/related-key útoky!
- Časem prostudujeme další algoritmy

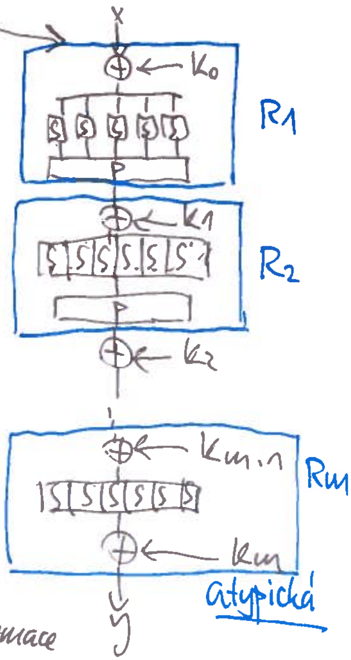
! Reálné šifry jsou prakticky vždy sudé permutace

DES (Digital Encryption Standard):



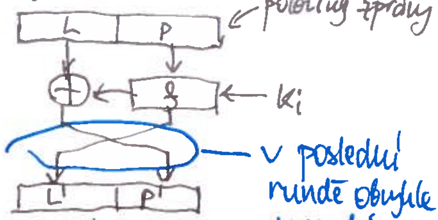
Odbočka o způsobech konstrukce blok. šifer:

- iterované šifry, rundy, rozvrh klíčů
- substitučně-permutační sítě (SPN)
  - S-boxy: malé tabulky, musí být invertibilní
  - počáteční a koncový XOR: whitening (omezuje kontrolu útočníka nad vstupy do S-boxů)
  - P-box: obecná permutace na pozicích v bloku
  - díky atypické R_m je inverze k SPN zase SPN (někdy volíme S, P jako involuce → tatáž SPN, jen obrátíme rozvrh klíčů)
  - confusion vs. diffusion
  - upgrade: kromě P používat invertibilní lin. transformace



hranice rund se posunou, P a ⊕ komutují, pokud permutujeme rundový klíč

- Feistelovy sítě
  - konstrukce s neinvertibilními S-boxy
  - runda obecně vypadá takto:



  - $f(P, k_i)$ může být libovolná funkce (typ. postavená z S/P-boxů)
  - inverze je zase Feistelova síť, jen se obrátí pořadí rundových klíčů

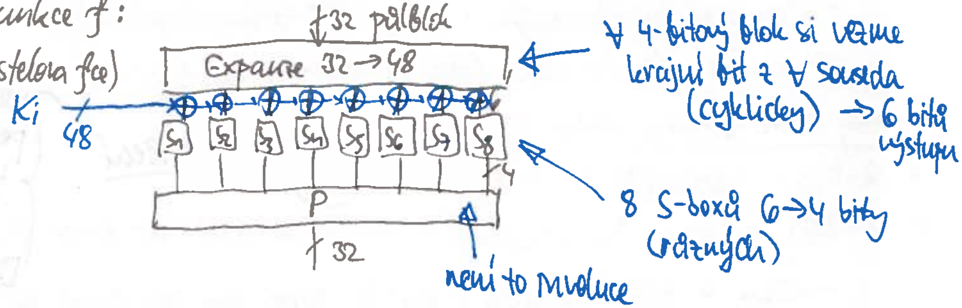
Historie DESu:

- vyvinut začátkem 70. let v IBM na zakázku NBS (Nat. Bureau for Standards), do vývoje mluvila i NSA
- 56-bitový klíč (technicky 64, ale v byte má paritní bit)
  - původní verze byla silnější
- 64-bitové bloky
- NSA na poslední chvíli vyměnila S-boxy – krajně podezřelé!
  - dnes už víme, že tím šifru zesílila

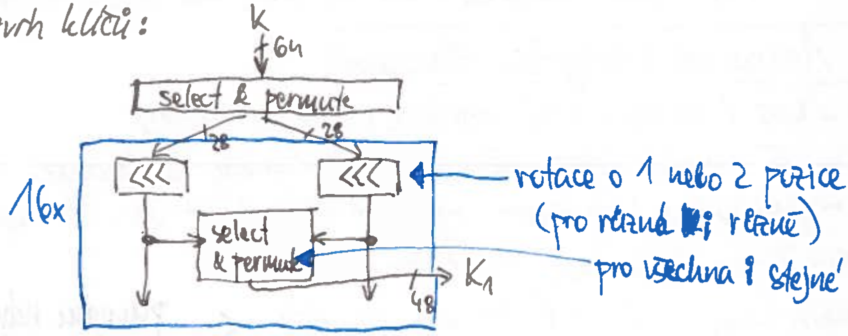
Struktura DESu:

- Feistelova síť s 16 rundami pracujícími s 32-bitovými půlbloky
- Navíc počáteční a koncový P-box (zcela zbytečné)
- Funkce f:

(Feistelova fce)



- Rozvrh klíčů:



Kritika DESu

- Pokud $K=0^{56}$, všechny k_i jsou 0^{48} → $E_K = D_K$
  podobně pro $K=1^{56}$ a 2 další klíče. } 4 tzv. slabé klíče
- 6 dvojic klíčů (k, k') takové, že $K \to (k_1, k_2, k_1, k_2, \dots)$ a $k' \to (k_2, k_1, k_2, k_1, \dots)$
  Pak: $E_K(E_{K'}(x)) = x$ pro všechna x.
- $E_{\overline{K}}(\overline{x}) = \overline{E_K(x)}$ } komplementárnost
- Příliš krátké klíče!
  - už v roce 1977 se odhadovalo, že za 20 M\$ jde postavit stroj, který vyzkouší všechny klíče za 1 den
  - 1997: RSA Security Inc. DES Challenge – cena 10k\$
    → cracknuto distrib. výpočtem v idle čase 78k počítačů

  ⋮
  - 2012: deska s 48 FPGA prohledá celý prostor za 26 hodin (pronajímají jako službu!)

- Krátké bloky – kolize bloků jednou za 2^{32} bloků!
- Útoky na strukturu:
  - diferenciální kryptoanalýza: stačí 2^{47} chosen plaintextů
  - lineární kryptoanalýza: stačí 2^{43} známých plaintextů

  → dost na to, abychom šifru považovali za rozbitou

Pokusy o záchranu DESu (90. léta)

- 2-DES – nepomůže! → sec. level jen 57 → cvičení
- 3-DES – $E_{k_3}(D_{k_2}(E_{k_1}(x)))$ → 168-bit. klíč, sec. level 112
  - někdy se potkává varianta s $k_1 = k_3$, pozor, má sec. level jen cca 80

nebezpečí: permutace mohou tvořit grupu! [DES ji netvoří]

AES – Advanced Encryption Standard

- 1997 – NIST (nástupce NBS) vypisuje otevřenou soutěž
  - 15 návrhů šifer, několik kol veřejného hodnocení
  - kriteria: bezpečnost, rychlost + snadnost SW i HW implementací
- 2001 – šifra Rijndael prohlášena za AES
- 128-bit. bloky, klíč 128, 192 nebo 256 bitů ← původní návrh uměl i delší klíče a větší bloky
  - 128 → 10 rund, 192 → 12, 256 → 14 rund

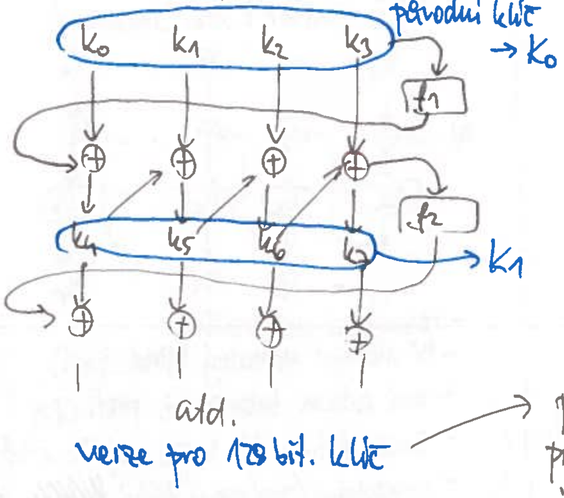
Struktura:

- není to feistelovská šifra, ale SPN s lineární transformací navíc
- bajtově orientovaná (pro efektivní implementaci v SW)
  - ↳ s bajty zacházíme jako s prvky $GF(2^8)$
- Stav šifry (předávaný mezi rundami) je matice 4×4 bytů, rundový klíč má stejný tvar.
- Runda:
  - ByteSub – bajty stavu proženeme identickými S-boxy 8→8 [S-box je inverze v $GF(2^8)$ + afinní transf. z rotací a XORů]
  - ShiftRow – i-tý řádek rotujeme o i bytů doleva
  - MixColumn – na ∀ sloupec (coby 4D vektor) aplikujeme stejnou invertibilní lin. transformaci (v poslední rundě není!)
  - AddRoundKey – XOR s klíčem
- Před 1. rundou AddRoundKey

- Inverzní runda:
  - AddRoundKey(K_i) } komutuje, pokud K_i nahradíme jeho mixem
  - InvMixColumn
  - InvShiftRow } komutuje
  - InvByteSub

  } tohle prohodíme řazením posunem rund → D_K vypadá skoro jako E_K, jen máme jiné S-boxy a jiné mixování

- Rozvrh klíčů: pracuje po 32-bit. slovech



f_i je postavena z S-boxu (téhož jako v rundě), rotace o 1 byte a přimíchání rundové konstanty

→ pro 192 bit. je to jen širší, pro 256 bit. je na prostředních ještě jedna nelinearita (aplikace S-boxu) $\nearrow \oplus$ k_i

- Vylepšení implementace na 32-bit. CPU
  - 4 tabulky 8 → 32 kombinující S-box s částí Mix Columns (∀ sloupec je XOR 4 lookupů v tabulkách) } 4 kB

Kritika

- jednoduchá algebraická struktura (útok řešením rovnic ... zatím se neumí)
- příliš malá rezerva v # rund
- zarovnaná na bajty

→ ale zatím se žádný zajímavý útok neumí. [kromě implementačních – viz později] → nějaké related-key útoky, ale stejně mají velkou složitost a tolik rel. keys se těžko shání

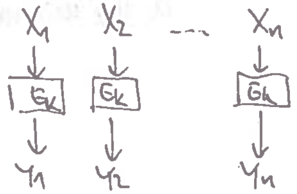
- 128-bit. klíč není bezpečný proti kvantovým počítačům (Groverův alg.)
- 128-bit. bloky hrozí kolizními útoky po 2^{64} blocích
  → obejdeme změnami klíče po $\sim 2^{32}$ blocích (v protokolu)

POUŽITÍ BLOKOVÝCH ŠIFER aneb šifrovací módy

- padding – musí být reversibilní!
  - $80\ \underbrace{00 \dots 00}_{P-1}$
  - $\underbrace{P\ P\ P \dots P}_{P}$
  - $\underbrace{00\ 00 \dots 00}_{P-1}\ P$ (nebo náhodné byty)

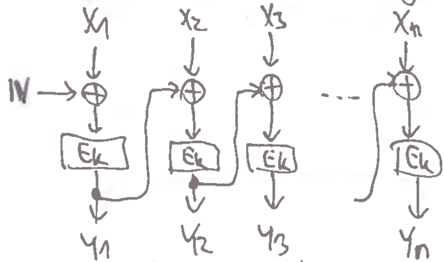
  ? chceme kontrolovat, že padding má správný formát?

ECB (Electronic Code Book)



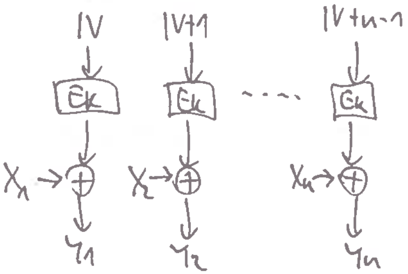
- totálně rozbitý, nepoužívat!
- odhaluje rovnost bloků
- nemá žádnou IV
- změna bitu v Y_i změní celý X_i, ostatní X_j nedotčeny
- vynechání/prohození bloků vesměs neškodné

CBC (Cipher Block Chaining)



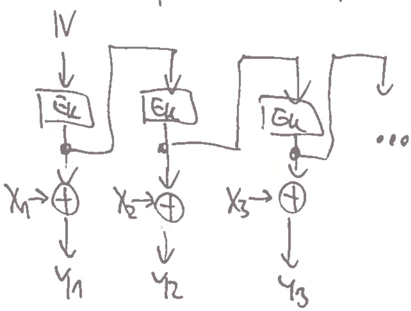
- rozmyslet dešifrování
- IV má být náhodný (jinak fail)
- má důkaz bezpečnosti proti CPA
- změna bitu v Y_i změní celý X_i a bit v X_{i+1}
- vynechání/prohození bloků ovlivní tyto bloky a 1 násl.
- pokud zpráva není moc dlouhá! Jinak se zopakují bloky ciphertextu → zjistím (ne)rovnost násl. bloků plaintextu

CTR (Counter)



- proudová šifra → netřeba padding
- nesmíme zopakovat IV!
- bit flip v Y_i ⇒ bit flip v X_i
- lze paralelizovat & má random access

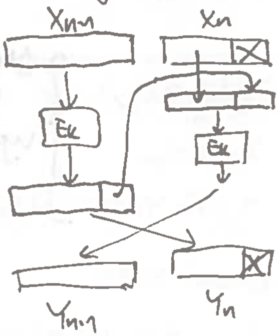
OFB (Output FeedBack)



- také proudová šifra
- pozor na krátké cykly
- keystream jsou vlastně 0^* šifrované CBC

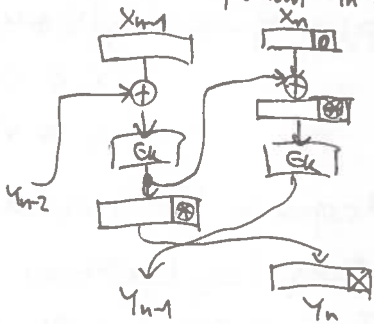
- ciphertext stealing – jak se vyhnout paddingu

u ECB:



→ část dat šifrujeme 2x
→ propagace chyb se chová trochu jinak u posl. 2 bloků

u CBC: stačí dopadovat nulami a prohodit Y_n s Y_{n-1}



Další zajímavé blokové šifry z finále AES:

- Serpent: bloky 128b, klíč 128–256b, 32-rundová SPN + lineární transf.
  - velmi konzervativní, nevyhrál kvůli pomalosti
- Twofish: bloky 128b, klíč do 256b, 16-rundová feistelovská síť
  - pomalá inicializace (key schedule), S-boxy vypočítá z klíče

Padding oracle attacks

- ukážeme pro CBC s paddingem typu $\underbrace{P \dots P}_{P}$ } předpokládáme orákulum, který nám řekne, jestli dešifrovaná zpráva má správný padding
- měníme bity v posl. bytu Y_{n-1} → to mění jednak X_{n-1}, ale hlavně odpovídající bity X_n

  → to může být chybová hláška nebo nějaký postranní kanál (třeba čas) → uvidíme útok tohoto typu na SSL/TLS

  jinak necháme útok selhat

  - pokud $P \neq 01$: právě jedna změna vede na korektní padding (totiž $P' = 01$)
  - víme tedy P → umíme ho nastavit na 02
  - najdeme předposl. byte, se kterým bude padding OK
    → to musí být 02 ⇒ víme, jaký byl původně
  - teď nastavíme posl. 2 byty na 03 03 a pokračujeme…

… až rekonstruujeme celý posl. blok, zprávu zkrátíme a pokračujeme → nakonec vyluštíme vše kromě 1. bloku (ten jen pokud můžeme ovlivňovat IV)

→ složitost útoku = 256 · délka zprávy

Prosakování informací z módů blok. šifer

ECB: $X_i = X_j \Leftrightarrow Y_i = Y_j$

CBC: Pokud $Y_i = Y_j$:
$$E_K(X_i \oplus Y_{i-1}) = E_K(X_j \oplus Y_{j-1})$$
$$X_i \oplus Y_{i-1} = X_j \oplus Y_{j-1}$$
$$X_i \oplus X_j = Y_{i-1} \oplus Y_{j-1}$$

jednou za průměrně $2^{b/2}$ bloků vyzradím b bitů ($Y_0 = IV$)

Naopak pro $Y_i \neq Y_j$ dostanu nerovnost XORů.

CTR: Všechny bloky keystreamu $C_1 - C_m$ jsou navzájem různé!

Takže $Y_i \oplus Y_j = (X_i \oplus C_i) \oplus (X_j \oplus C_j) = (X_i \oplus X_j) \oplus (C_i \oplus C_j) \neq X_i \oplus X_j$.

→ vyzradím: pro každý pár X_i, X_j:

$$\underbrace{\binom{m}{2}}_{\#\text{párů}} \cdot \underbrace{(b - \log(2^b - 1))}_{\log \frac{2^b}{2^b-1} = \log\left(1 + \frac{1}{2^b-1}\right) \doteq \frac{1}{2^b-1} \doteq 2^{-b}}$$

informace z párů nemusí být nezávislé → je to horní odhad

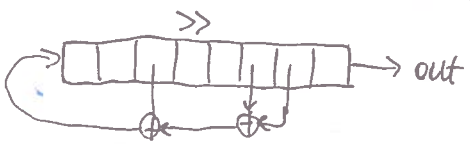
pro $m \approx 2^{b/2}$ je to konst. # bitů

⇒ chci šifrovat méně než $2^{b/2}$ bloků, abych prosakování minimalizoval.

PROUDOVÉ ŠIFRY

- známe jich celkově málo
- eSTREAM project – evropský projekt hledající nové proudové šifry
  - začal v roce 2004, finále 2008
  - Profile 1 (SW): 4 šifry
  - Profile 2 (HW): 3 šifry

LFSR Linear-Feedback Shift Registers



$y_{n-1} - y_0 \rightarrow y_n - y_1$

kde $y_n = \bigoplus_{i=0}^{n-1} c_i \cdot y_i$

c_i … klíč

Neznáme klíč a počáteční stav registru.

- pro vhodně zvolené klíče má periodu 2^n-1
  ↑ to lze hezky popisovat pomocí algebry polynomů
  ... ale snadno podlehne known-plaintext útoku:
    - z prvních n bitů výstupu přečteme iniciální stav
    - z dalších n bitů sestavíme lineární rovnice pro klíč
      ... pro max. periodu vždy vyjde regulární soustava

Pokusy o nápravu:
- nelineární feedback (je těžké zaručit dlouhou periodu)
- nelineární výstup (kombinujeme víc bitů registru)
- nelin. kombinace výstupů různých registrů (perioda se prodlužuje na LCM)
- výstup jednoho registru řídí hodiny jiného

Šifra A5/1 v GSM (prolomená)

Trivium – eSTREAM HW profile
- 3 registry různých délek, celkem 288 bitů
- nelineární zpětné vazby (kombinace ANDů a XORů)
- lineární generování výstupu
- init: registry naplním 80b klíče + 80b IV + konstanty a provedu 1152 kroků naprázdno
- zatím není známý útok složitosti menší než 2^{80}, ale některé zkrácené varianty (rychlejší init) už prolomeny
- trik: z prvních 65 bitů každého registru nic nevede
  ⇒ výpočet lze paralelizovat.

RC4 (Rivest 1987) – šifra založená na permutacích, vhodná pro SW

Stav: $S[0\ldots255]$ permutace na $0\ldots255$
indexy i, j

Krok:
$i \leftarrow (i+1) \bmod 256$
$j \leftarrow (j+S[i]) \bmod 256$
$S[i] \Leftrightarrow S[j]$
output $S[(S[i]+S[j]) \bmod 256]$

Init: 256 kroků
k j navíc přičítám i-tý znak klíče (cyklicky)

Ještě nedávno dost populární... netrpěla na útoky na padding

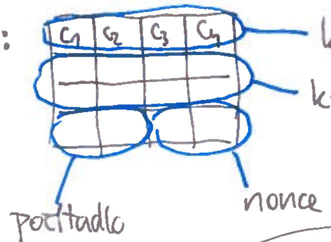
- statistické útoky: stav se nepromíchává dostatečně,
  z korelací mezi byty jde spočítat klíč
  → 2015: použití v TLS rozbito za 75 hodin
  použití ve WPA-TKIP za 1 hodinu
  (mnohem dřív: použití ve WEP rozbito kvůli related keys)

ChaCha20 (nástupce šifry Salsa20 z eSTREAMu, SW profil) (Bernstein 2008)
20 = # rund

- 256-bit. klíč, 64b počítadlo bloku, 64b nonce
  ↳ funguje skoro jako CTR mód blokové šifry

  } pozor, různé verze mají různé rozděl. bitů mezi počítadl a nonci

- stav je matice 4×4 32b čísel
- init:



konstanty: ASCII "expand␣32-byte␣k"
klíč

- čtvrtina rundy (QR): kombinace XORů, sčítání a rotací aplikovaná na 4 políčka matice → tzv. ARX-šifra
- sudá runda: QR na sloupce
  lichá runda: QR na toroidní diagonály
- má elegantní implementaci vektorovými instrukcemi
- výstup se nakonec přičte k poč. stavu (po složkách)
  ↳ to je nutné, protože QR je invertibilní
  (jinak by ze známého páru plaintext + ciphertext šel získat klíč 8))

HEŠOVACÍ FUNKCE

Cíl: funkce $h: \{0,1\}^* \to \{0,1\}^b$

- ideálně nerozlišitelná od náhodné funkce
  ... to ale neumíme nadefinovat, neboť h nemá klíč
- Typické požadavky: ① Neumíme najít kolizi: $f(x) = f(x')$ pro $x \neq x'$
  ② Neumíme najít druhý vzor: pro x nenajdeme x': $f(x) = f(x')$
  ③ Neumíme invertovat: pro y nenajdeme x t.ž. $f(x) = y$.
- 👁 ③ ⇐ ② ⇐ ①
  pokud máme $y = f(x)$, inverze y by nejspíš našla jiné x (typicky má nekonečně možností)

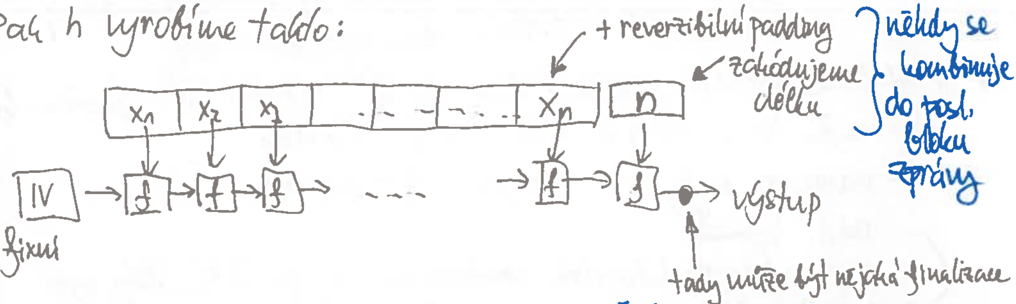
Aplikace: Commitment

Merkleova-Damgårdova konstrukce

viz dále

- pořídíme si kompresní funkci $f: \{0,1\}^b \times \{0,1\}^b \to \{0,1\}^b$

Pak h vyrobíme takto:



- Pokud f je odolná proti kolizím, h je též odolná.

Dk: Nechť $h(x_1 - x_n) = h(x_1' - x_{n'}')$
① Pokud $n \neq n'$, mám kolizi v posl. volání f.
② Pokud $n = n'$: – posl. bloky se nerovnají ⇒ kolize v f
– rovnají ⇒ kolize kratších zpráv ⇒ iteruji

- Kdybych nepřihešovával délku:
  - Při kolizi h najdu postupem pozpátku buď kolizi f nebo inverzi $f^{-1}(IV)$ ... ale to jsem nepředpokládal, že nejde (z odolnosti f to neplyne).
- Length extension – v tom se liší od náhodné funkce!

Odolnost proti kolizím

- Řádově $2^{b/2}$ vstupů (jakýchkoli – mohou to být smysluplné zprávy) stačí na "narozeninovou" kolizi, ale potřebuji paměť $2^{b/2}$
- Málo paměti: $x_{i+1} = h(x_i)$, želva a zajíc se honí po lízátku
  → Jak to udělat se smysluplnými zprávami?
  Pořídím si parametrizované zprávy (b míst, kde si mohu vybrat mezi 2 smysluplnými variantami)
  a pak volím x_{i+1} jako zprávu parametrizovanou $h(x_i)$.
  → Varianta s množinovým naroz. útokem: (ten už zas potřebuje paměť)
  - "Oběť" je ochotna podepisovat "hodné" zprávy, já chci podepsat "zlou" zprávu
  - Pořídím si parametrizovanou hodnou a zlou zprávu
  - Vygeneruji heše $2^{b/2}$ hodných a $2^{b/2}$ zlých zpráv
  - S velkou PP ∃ průnik obou množin hešů.
- U M-D konstrukce umím v čase $k \cdot 2^{b/2}$ vyrobit 2^k-násobnou kolizi
  - najdu x_1 a x_1' t.ž. $f(IV, x_1) = f(IV, x_1') =: y_1$
  - najdu x_2 a x_2' t.ž. $f(y_1, x_2) = f(y_1, x_2') =: y_2$
    atd. k-krát
  - zprávu mohu libovolně kombinovat z x_i a x_i', vždy vyjde stejný heš.
  z toho útok na konkatenaci dvou různých hešů z nichž aspoň jeden je M-D

Kde sehnat kompresní funkci?

- Daviesova-Meyerova konstrukce z blokové šifry:
  $$f(a,b) = E_a(b) \oplus b$$
  - Proč $\oplus b$? Bez toho: $E_a(b) \to y$, $D_{a'}(y) \to b'$ ... pak $f(a,b) = f(a',b')$.
  - Pozor, rozbije se pro DES: $f(\bar{a},\bar{b}) = E_{\bar{a}}(\bar{b}) \oplus \bar{b} = \overline{E_a(b)} \oplus \bar{b} = E_a(b) \oplus b = f(a,b)$
  - Věta: Je-li E/D ideální šifra, f je odolná proti kolizím.
    Přesněji: útočník, který zavolá E q-krát, najde kolizi s pstí $\leq q^2/2^b$ pro $q < 2^{b/2}$

    Dk: BÚNO útočník nevyhodnocuje E/D redundantně.
    Pokud se zeptá na $E_x(y)$, dozví se $f(x,y) = E_x(y) \oplus y$.
    Pokud na $D_x(y)$, dozví se $f(x, D_x(y)) = y \oplus D_x(y)$.

Při i-tém pokusu nastane kolize, pokud se strefím do některé z $i-1$ předchozích hodnot … pro $\forall$ cílovou hodnotu to nastane pro právě 1 volbu výsledku E/D. Proto:

$\Pr[\text{dvojice se shodne}] \leq 1/(2^b - (i-1)) \leq 2^{-(b-1)}$ } triv. odhad pomocí 2^{-b} nefunguje, neboť E není náhodná; je-li $i \leq 2^{b-1}$

max. $i-1$ hodnot je už obsazeno z předch. dotazů

$\Pr[\text{najdu kolizi}] \leq \Pr[\text{dvojice se shodne}] \cdot \underbrace{\#\text{dvojic}}_{\leq q^2/2} \leq q^2/2^b$. Sice, ujistit: náhodná permutace!

• Pozor, jde najít $f(a,b)=b$ … stačí položit $b = D_a(0)$ → to by pro náhodnou f mělo být těžké (ale nevadí to…)

• MD5: 128b výsledek, od roku 2004 známé kolize (i chosen-prefix)
(Rivest 1992) ↑ to je málo ↳ ale invertovat ji neumíme

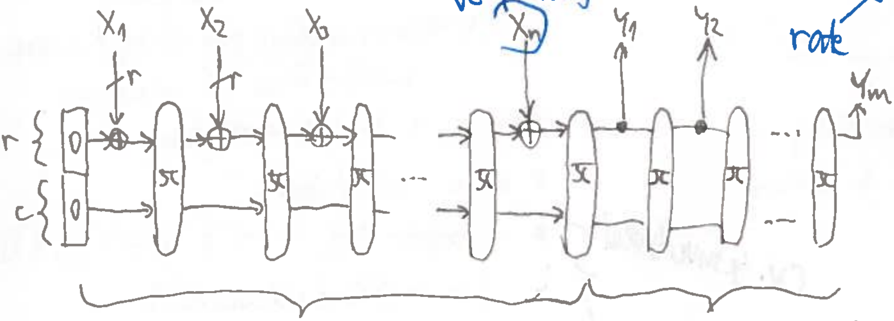
• SHA-1: 160b výsledek, 2015 kolize v kompres. funkci
(NSA) 1995 — 2017 plná kolize (zatím dost náročná)
- konstrukce podobná Daviesovi-Meyerovi
(příslušné šifře se občas říká SHACAL)

• SHA-2: verze s 224, 256, 384, 512 bity výsledku
- mohutnější, ale podobná struktura
- zatím nejsou rozbité

• SHA-3 (veřejná soutěž NISTu, finále 2015)

"Houbovitá funkce" … uvažujme permutaci π na $w = (r + c)$-bit.
(width; rate; dat; capacity)

vč. paddingu



"nasávací" fáze (absorbing) — "vymačkávací" fáze (squeezing)

• Odolnost proti kolizím je ovlivněna < velikostí vymačkaného výstupu; kapacitou c (interní kolize)

- Interní kolizní útok

krmím samými nulami

Po řádově $2^{c/2}$ krocích najdu $b_i = b_j$, $i<j$.
Zprávy 0^i a $0^{j-1}(a_i \oplus a_j)$ vedou na tentýž vnitřní stav
⇒ vymačká se stejný výstup. [mohu pak doplnit stejné pokrač. za oba prefixy a zase mám kolizi...]

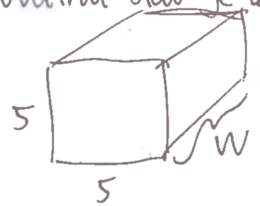
⇒ security level je nejvýše $c/2$.

- SHA-3 je houba s permutací Keccak šířky 1600 bitů.
Standard definuje:

SHA3-224	$r=1152$	$c=448$	vždy $c = 2\cdot$ délka výstupu
⋮			
SHA3-512	$r=576$	$c=1024$	
SHAKE128	$r=1344$	$c=256$	XOF = extendable output functions (výstup lib. velikosti) ↳ PRNG
SHAKE256	$r=1088$	$c=512$	

vymačkává se jediným krokem

- Jak vypadá Keccak?
Vnitřní stav je kvádr



... 25 slov šířky w
(v SHA-3 je $w=64$)

Provádíme $12 + 2\log w$ rund, v každé:
- ke každému sloupečku přixoruji paritu 2 okolních sloupečků (to dělám paralelně pro všechny sloupce v 1 svislém řezu bit-slicingem)
- každé z 25 slov zrotujeme
- slova permutujeme
- v každém řádku: $x_i \leftarrow x_i \oplus (\neg x_{i+1} \,\&\, x_{i+2})$
[to je jediná nelinearita]

CV: je invertibilní

- přimícháme k 1 slovu rundovou konstantu

- Různé módy použití (SHA-3, SHAKE, další budoucí) mají různý padding ⇒ jsou rozlišitelné

Merkleovy stromy

- listy hešují bloky vstupu (lze počítat paralelně)
- vnitřní vrcholy hešují výsledky svých synů
- pozor, kořen je potřeba odlišit! Jinak bych mohl vyfrknout podstrom
  uložím hloubku / k vrcholu přihešuji flag

nebo sestrojit 2nd preimage prohlášením vnitřních vrcholů za listy

→ kódování Sakura (součást specifikací kolem SHA-3)

- výhody: – paralelizace
  – random-access ověřování i update

MESSAGE AUTHENTICATION CODES (MACs, symetrické podpisy)

- obecně: funkce na generování a ověřování podpisu
  ↳ pokud je deterministická, ověření je memcmp
- můžeme si představit jako keyed hash
  – pro náhodný klíč se má chovat jako náhodná funkce
- příklad: $MAC(K,X) = hash(K \| X)$
  ! rozbité pro heše typu Merkle-Damgård → extension attacks!
  ↳ ale pro ideální hash funguje a pro SHA-3 také (spec. KMAC)
- co třeba $hash(X \| K)$?
  - to není bezpečné proti obecným kolizním útokům na h (většina výpočtu nezávisí na klíči)
    ← s klíčem i na začátku je to pro SHA-1 jako třeba tady

→ konstrukce $HMAC_h(K,X) := H(K \oplus c_{out} \| H(K \oplus c_{in} \| X))$

konstanty: c_{out}, c_{in}

jako třeba tady

HMAC nad SHA-1/2 je běžný v internetových protokolech; jako takový OK i dnes

myšlenka: skládám 2 funkce:
- vnitřní je odolná proti kolizím a bere $\{0,1\}^*$
- vnější je bezpečná MAC, ale stačí fixní délky

Bezpečnost (CPA):
- útočník dostane podepisovací orákulum
- má vyprodukovat korektní podpis pro zprávu, na kterou se nezeptal orákula.

- Kombinace šifra + MAC:
  1. nezávisle obě (auth & encrypt): MAC prozradí info o plaintextu (třeba rovnost)
  2. encrypt-then-MAC: bezpečné
  3. MAC-then-encrypt: často mívá padding orákula

- <u>CBC-MAC</u> – šifruji pomocí CBC, MAC = poslední blok zašifr. textu
  - nutná konstantní IV (jinak děravé – možno měnit 1. blok zprávy) a kompenzovat změnou IV
  - nesmíme vyzradit jiné zašifrované bloky (jinak truncate/reassemble)
  - umíme dokázat bezpečnost, pokud:
    ① šifra je ideální, ② množina zpráv je bezprefixová [konst. délky / délka na začátku atd.] jinak reassemble kombinací 2 zpráv

! Nesmíme použít stejný klíč pro šifrování a MAC !!

- <u>Shannonovsky bezpečný MAC</u> – předpokládejme one-time klíč
  - pořídíme si rodinu 2-nezávislých heš. funkcí
    ne v kryptograf. smyslu!

$$\mathcal{H} := \{h_K \mid K \in \mathcal{K}\},\quad \forall K\ h_K : X \to Y$$

$$\forall x, x' \in X,\ x \neq x',\ \forall y, y' \in Y \quad Pr_{h \in \mathcal{H}}[h(x) = x \ \&\ h(x') = y'] = \frac{1}{|Y|^2}$$

je to také integer $|\mathcal{K}|$ $\Rightarrow |\mathcal{K}| \geq |Y|^2$

<u>Příklad:</u> $X = Y = \mathbb{Z}_p$, $K = \mathbb{Z}_p^2$, $h_{a,b}(x) = ax + b$ – pro x, x', y, y' dostanu soustavu 2 lineárních rovnic pro a, b $\Rightarrow \exists!\ a, b \Rightarrow Pr = 1/p^2$

- podepisuji pomocí h_K s náhodným klíčem $K \in \mathcal{K}$
- jaká je Pr, že po pozorování dvojice $(x, \underbrace{h(x)}_{y})$ mi vyjde tip (x', y')?

$$Pr[\text{útok vyšel}] = Pr_h[h(x') = y' \mid h(x) = y] = \frac{Pr[h(x) = y \ \&\ h(x') = y']}{Pr[h(x) = y]} = \frac{1/|Y|^2}{1/|Y|} = \frac{1}{|Y|}.$$

posčítáním Pr z definice $\mathcal{H}$ přes všechna y'

→ nepřekonám náhodné tipnutí podpisu.

klíč musí být aspoň 2x delší než zpráva – cvič.

- <u>Praktická implementace:</u> pořídím si nonci, z té šifrováním taj. klíčem odvodím pseudonáhodný klíč pro $\mathcal{H}$

- <u>Aproximace:</u> $(2,c)$-nezávislost … $Pr[= \& =] \leq c/|Y|^2$
  … např. $((ax+b) \bmod p) \bmod m$ je $(2,4)$-nezávislé.

Jak se změní Pr úspěšného útoku?

$$\frac{Pr[h(x) = y \ \&\ h(x') = y']}{Pr[h(x) = y]} \leq \frac{c/|Y|^2}{1/|\mathcal{K}|} = \cancel{\frac{c \cdot |\mathcal{K}|}{|Y|^2}}$$

tohle je moc slabé, více méně konstanta!

tohle je $\leq c/|Y|$, ale to nám je ve jmenovateli nanic… ovšem také je to $\geq 1/|\mathcal{K}|$

- Polynomiální MAC ... opět nad tělesem $\mathbb{Z}_m$, klíče $\in \mathbb{Z}_m^2$

$h_{a,b}(x_1 \ldots x_n) = x_1 \cdot a^n + x_2 \cdot a^{n-1} + \ldots + x_n \cdot a^1 + b$ } snadno spočteme Hornerovým schématem

Falšování pro 2 zprávy téže délky.

$\Pr_{a,b}[h_{a,b}(x) = y \ \& \ h_{a,b}(x') = y']$

... odečtením rovnic: $(x_1 - x_1')a^n + (x_2 - x_2')a^{n-1} + \ldots + (x_n - x_n')a^1 = y - y'$
čili a musí být kořenem nějakého polynomu stupně nejvýš n ⇒ takových a je max. n

... pro každé takové a $\exists! \, b$ takové, že platí i druhá rovnice.

⇒ $\Pr \leq n/m^2$.

$\Pr_{a,b}[h_{a,b}(x) = y] = 1/m$ ... pro každé a $\exists! \, b$, pro které to platí.

⇒ $\Pr[\text{útok uspěje}] \leq n/m$. – tedy chci $m \geq n^2$, abych Pr stlačil pod úspěšnost tipování podpisu

- Mód blokových šifer GCM [Galois/Counter Mode], populární s AES
  - pracuje v tělese $GF(2^{128})$: sčítání je XOR, násob. je CLMUL + redukce mod ired. poly.
  - autentikuji nezašifrovaná data $A_1 \ldots A_m$ a $Y_1 \ldots Y_n$ $\{Y_i = X_i \oplus E_k(IV + i)\}$, za to přilepím blok kódující m, n a blok $E_k(IV)$. "Authenticated Encryption with Associated Data"
  - výsledné bloky dají koeficienty polynomu, ten vyhodnotím v bodě $E_k(0)$

→ je to polynomiální MAC s klíčem generovaným blokovou šifrou

- Poly1305 [Bernstein 2005]
  - poly-MAC v tělese $GF(\underbrace{2^{130} - 5}_{\text{prvočíslo}})$ ... o něco větší rozsah než 128b bloky, výsledek nakonec modulíme 2^{128}
  - každý blok se paduje (to se vždy vejde ☺)
  - potřebuji nonci a tajný klíč (k, r) [k je 128b, r má nějaké bity vynul. → jen 106b] to zjednoduší implementaci aritmetiky
  - polynom vyhodnotím $\underbrace{\text{v bodě } r}_{\text{a mod } 2^{128}}$ a $\underbrace{\text{přičtu } E_k(\text{nonce})}_{\text{tohle už mod } 2^{128}}$

☺ Jelikož přičítám "one-time pad", z žádné odchycené zprávy se nedozvím nic o r ⇒ není třeba pokaždé jiné r

$\Pr[\text{útočník uspěje}] \leq \text{délka zprávy} / 2^{106}$, což je OK pro zprávy rozumných délek. to je potřeba i zde

- původně specifikován s AES, dnes se často kombinuje s ChaCha20.

NÁHODNÉ GENERÁTORY

Požadavky: Útočník ani se znalostí předchozího výstupu nedovede (efektivně) předpovídat budoucí výstup.
[to speciálně implikuje statistickou rovnoměrnost]

Možná řešení: → pseudonáhodný generátor (třeba šifra v CTR módu)
→ HW generátor náhodnosti
- šum na odporu / diodě apod.
- radioaktivní zářič
- průchod/odraz fotonu na polopropust. zrcátku
- lávové lampy
- rádiový šum
- kruhový oscilátor
- timing kláves / disku / sítě...

} pozor, útočník může tyto jevy také měřit a případně ovlivňovat

→ kombinace obojího – /dev/random a spol. } máme-li reálnou náhodu, pomůže nám; pokud ne, stále je to PRNG
- RDRAND v procesoru (jak moc důvěryhodný ?)
  └ metastabilní oscilátor, automatická kontrola anomálií, hrubý PRNG založ. na AES

Problémy:
- Je-li vnitřní stav kompromitován, potřebujeme přidat hodně entropie najednou, jinak útočník probere všechny možnosti a určí nový stav → pooling, odhadování entropie (šarlatánství...)
- Inicializace po bootu → ukládání stavu, riziko rollbacku → zálohy → snapshoty VM

Fortuna [Ferguson, Schneier 2003] ... elegantní RNG, který nepotřebuje odhadování entropie zdrojů

- Generátor
  - používá AES s 256b klíčem
  - šifruje 128b počítadlo (nikdy nepřeteče)
  - po vygenerování nejvýše 2^{16} bloků (nebo požadovaného množství dat) vygeneruje nový klíč (CTR neopakuje bloky, na to by se časem přišlo), ale neresetuje počítadlo (tím rozbije potenciální krátké cykly)
- Akumulátor
  - sbírá externí náhodnost do kyblíčků P_0 — P_{31}, každý zdroj náhodnosti přidává j-tý vzorek do $P_{j \bmod 32}$.

- jakmile P_0 naakumuluje dost vzorků (ale ne častěji

seed { než jednou za 100 ms), přihešuji jeho obsah ke klíči generátoru a v i-tém kroku ještě všechny P_j pro $2^j \setminus i$. Použité kyblíčky vysypu.

$\Rightarrow$ z kompromitovaného stavu se časem vzpamatuji (čas závisí na rychlosti přitékání entropie) .. přesněji:
  - nechť za 1 krok reseedování přiteče ϱ bitů entropie
  - 128 bitů určitě stačí k zotavení
  - pokud $\varrho \geq 128$, zotavíme se příštím reseedem (P_0 použijeme vždy)
  - jinak se zotavím po reseedu z P_i takového, že

$$128 \leq \underbrace{2^i \cdot \varrho/32}_{\text{přítok do 1 kyblíčku}} < 256$$

jinak mohu zmenšit i

  - čili chci $2^{12} \leq 2^i \cdot \varrho \leq 2^{13}$

$$\frac{2^{12}}{\varrho} \leq \underbrace{2^i}_{\#\text{kroků na zotavení}} \leq \frac{2^{13}}{\varrho}$$

BEZPEČNÝ KANÁL (příklad z Practical Crypto)

- Alice a Bob mají unikátní tajný klíč (pro $\forall$ kanál jiný)
- chtějí obousměrně komunikovat
- jeden pošle m_1 — m_r, druhý přijme podposloupnost (a ví, kterou)
- zkombinujeme:
  - šifru (třeba AES/CTR)
  - MAC (after encrypt)
  - sekvenční číslo

  } pro každý směr zvlášť

  ↳ po 2^{32} zprávách chceme měnit klíče
  - odvozování klíčů (2x šifra, 2x MAC) hešovací funkcí z hlav. klíče

---

Pozn. k Linuxovému /dev/(u)random
- pooly míchá pomocí CRC (tady stačí inf.-teor. mixování)
- PRNG založen na ChaCha20
- entropy estimators

TEORIE ČÍSEL

- složitost aritmetiky pro b-bit. čísla: add/sub $\Theta(b)$
  mul $O(b^2)$, dokonce $O(b)$ [ale s obří konst.]
  div/mod … o trochu horší než mul, rozhodně $O(b^2)$
  - modulární umocňování: $a^k \bmod N$ pomocí $O(\log k) \times$ mul
    $\to$ pro b-bit. čísla $O(b^3)$
- Euklidův algoritmus: $O(b)$ průchodů $\to$ celkem $O(b^3)$
  - lepší analýza / binární GCD $\to O(b^2)$
  - značení: $\gcd(x,y)$, $x \perp y \Leftrightarrow \gcd(x,y) = 1$ (nesoudělnost)
  - rozšířený E.a.: spočte $\underbrace{u,v \in \mathbb{Z}}_{\text{Bézoutovy koeficienty}}$: $ux + vy = \gcd(x,y)$
- počítání mod N: $\mathbb{Z}_N$ je okruh … kdy je prvek invertibilní?
  - ~~[illegible]~~ řešíme kongruenci $ax \equiv b \pmod N$ … a, b známe; x hledáme
  - ekvivalentní s: $\exists y \in \mathbb{Z}: ax - Ny = b$
    1. pokud $b = \gcd(a,N)$: Bézoutovy koef. dají x, y
    2. pokud $b = c \cdot \gcd(a,N)$: jako předtím, nakonec vynásobíme c
    3. jinak nemá řešení: levá strana je dělitelná $\gcd(a,N)$, pravá ne
  - a je invertibilní $\Leftrightarrow a \perp N$
    $\hookrightarrow \mathbb{Z}_N^*$: multiplikativní grupa mod N [je to grupa]
  - pokud N je prvočíslo, invertibilní je vše kromě $0 \Rightarrow \mathbb{Z}_p$ je těleso.
  - inverze umíme počítat efektivně
- Malá Fermatova věta: pokud $x \perp p$, pak $x^{p-1} \overset{p}{\equiv} 1$.
  (díky tomu x^{p-2} je inverze x, to dává jiný efektivní alg.)

$\hookrightarrow$ zobecnění: Eulerova věta: pokud $x \perp N$, pak $x^{\varphi(N)} \overset{N}{\equiv} 1$
  - zde $\varphi(N) = |\mathbb{Z}_N^*|$, tedy $\#a \in \mathbb{Z}_N : a \perp N$
  - Dk: $x^0, x^1, x^2, \ldots x^{k-1}$ je nějaká podgrupa $\mathbb{Z}_N^*$, říkejme jí třeba H

$\hookrightarrow x^k$ bude první 1 kromě x^0

Lagrangeova věta: Je-li G konečná grupa a $H \leq G$, pak $|H| \setminus |G|$.
(nám stačí pro komutativní grupy)

→ podle Lagrange: $|H| \setminus |\mathbb{Z}_N^*| = \varphi(N)$
tohle je k

→ $\varphi(N) = k \cdot c$ pro nějaké c

→ $x^{\varphi(N)} = (x^k)^c = 1^c = 1$.

- Čínská zbytková věta (CRT): Pokud $N_1 - N_k$ navzájem nesoudělná a $N = \prod_1 N_i$, pak $\mathbb{Z}_{N_1} \times \_ \times \mathbb{Z}_{N_k} \cong \mathbb{Z}_N$ ← dokonalý isomorfismus, navíc efektivní

Dk: BÚNO $k=2$, dál se pokračuje indukcí (triv.)

① Nekonstruktivně: $f(x) := (x \bmod N_1, x \bmod N_2)$
je zobrazení z $\mathbb{Z}_N$ do $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2}$
→ je prosté ⇒ je také na (vede mezi stejně velkými množinami)

② Konstruktivně: Chci vzor dvojice (a_1, a_2).
Najdu čísla u_1, u_2 t.ž. $f(u_1) = (1,0)$, $f(u_2) = (0,1)$
↳ pak stačí položit $x := a_1 u_1 + a_2 u_2$ (vše mod N)
↳ kde je vzít: $f(N_2) = (q, 0)$ ... pokud $q=1$, vyhrál jsem a mám $u_1 = N_2$
... jinak násobím N_2 inverzí q mod N_1 (vím, že $q \perp N_1$) $q \perp N_1$ díky $N_1 \perp N_2$

→ podobně u_2.

- Výpočet $\varphi(N)$:
  - $\varphi(p) = p-1$ [už víme]
  - $\varphi(p^k) = (p-1) \cdot p^{k-1}$
  - pro $x \perp y$ máme $\varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ ... to je vidět z CRT

⇒ $\varphi(N)$ umíme spočítat, pokud známe faktorizaci N

- Faktorizace vs. prvočíselnost → snadná...

považuje se za ~~težkou~~:
- přímočaré alg. jsou exponenciální
- umí se různé subexponenciální (čím dál lepší)
- kvantové počítače umí polynomiálně [Shor 1994]

- rychlé pravděpodobnostní testy s 1stranou chybou
- poly alg. [Agarwal et al. 2002] ... zatím nepříliš praktické

- Pravděpodobnostní testy prvočíselnosti "Euklidův svědek"

- Fermatův test: pro náhodné $x \in \mathbb{Z}_N$ spočítáme $x^{N-1} \bmod N$.
  → pokud nevyjde 1, N je složené [x je Fermatův svědek]
  ↳ buď proto, že $x \not\perp N$, nebo díky F. větě
  - Jaká je Pr, že složené číslo projde testem? Kolik je svědků?
    - bohužel existují Carmichaelova čísla (nejmenší je 561)
      pro než $\forall x \in \mathbb{Z}_N^* \; x^{N-1} \overset{N}{\equiv} 1$ ... mají jen Euklidovy svědky a těch je málo
      → Carm. čísel je nekonečně mnoho [Alford et al. 1994]
    - pokud N není Carm., už to dopadne dobře:
      $H := \{x \in \mathbb{Z}_N^* \mid x^{N-1} \overset{N}{\equiv} 1\}$ je podgrupa $\mathbb{Z}_N^*$
      ... přitom $H \neq \mathbb{Z}_N^*$, takže podle Lagrangeovy věty $|H| \leq \frac{|\mathbb{Z}_N^*|}{2}$
      $\Rightarrow Pr[x \text{ je svědek}] \geq 1/2$.

      test pak můžeme iterovat: po k pokusech je $Pr[\text{false positive}] \leq 1/2^k$

- Rabinův-Millerův test:

  1. $x \in_R \{1 \dots N-1\}$
  2. pokud $\gcd(x,N) \neq 1$: SLOŽENÉ (Euklidův svědek)
  3. spočítáme [pozpátku] $x^{N-1} \bmod N$ ← pokud není 1: SLOŽENÉ (Fermatův svědek)
     $x^{\frac{N-1}{2}} \bmod N$
     ⋮
     $x^{\frac{N-1}{2^t}} \bmod N$
     Dokud jsou 1, pokračujeme. Pokud −1: PRVOČÍSLO. Jinak SLOŽENÉ (Riemannův svědek)

     zastavíme se, až bude exponent lichý → odpovím PRVOČÍSLO

  ☺ Pokud odpovím SLOŽENÉ, je to pravda

  Věta [Rabin]: $Pr[\text{PRVOČÍSLO} \mid x \text{ složené}] \leq 1/4$

  Věta [Miller]: Pokud platí zobecněná Riemannova hypotéza, $\exists$ svědek $\in O(\log N)$.

- Generování velkých prvočísel: náhodně tipujeme a testujeme, hustota prvoč. kolem N je cca $1/\ln N$.

- **Diskrétní logaritmy**
  - Věta: $\mathbb{Z}_p^*$ je cyklická grupa → $\exists g$ (generátor) t.ž. $\{g^0, g^1, \dots, g^{p-2}\} = \mathbb{Z}_p^*$
  - Jinými slovy $\mathbb{Z}_p^* \cong (\mathbb{Z}_{p-1}, +)$
    - isomorfismus je v jednom směru umocňování, → poly. alg.
      v druhém diskrétní log.
      ↳ podobně těžké jako faktorizace – subexp. / kvantově poly.
  - Jak ověřit, zda g je generátor? pro $g \in \mathbb{Z}_p^*$
    Pokud není, pak
    $H := \{g^0, g^1, \dots\}$ je nějaká podgrupa $\mathbb{Z}_p^*$ ⇒ $|H| \setminus \varphi(p) = p-1$
    → $g^{\frac{p-1}{k}} = 1$ pro nějaké přirozené k … dokonce stačí prvočíselné k.
    → jakmile známe faktorizaci $p-1$, umíme to otestovat
    (dost rychle, protože faktorů je $O(\log p)$).
  - Jak najít generátor? Náhodně vybíráme a testujeme…
    Kolik je generátorů?
    → pokud g je gen., pak g^k je gen. ⇔ $k \perp p-1$
    → # generátorů $= \varphi(p-1)$ … to je dost (nepočítáme přesnou Pr…)

- **Diskrétní odmocniny**
  - v $\mathbb{Z}_5$: $1^2 = 4^2 = 1$, $2^2 = 3^2 = 4$ ⇒ 1, 4 mají 2 odmocniny "kvadratické zbytky" (QR)
    2, 3 nemají žádnou
    0 má právě 1
  - Obecně mod p: kromě 0 má polovina čísel 2 odmocniny, zbytek žádnou.
    - nejvýše 2: jsou to kořeny kvad. polynomu
    - pokud $x^2 = a$, pak také $(-x)^2 = a$
      … kromě $x = -x$ (jen pro $x=0$) ~~je vždy~~ je odmocnin sudý počet
  - nechť g je generátor $\mathbb{Z}_p^*$: g^{2k} má 2 odmocniny } takových čísel je $\frac{p-1}{2}$
    ↳ na čísla g^{2k+1} už žádné odmocniny nezbyly
  ⇒ sudost/lichost $\operatorname{dlog}(x)$ prozradí, zda x je QR.

- Množina všech QR tvoří podgrupu $\mathbb{Z}_p^*$. (1 je QR, QR·QR je QR)
- Testování QR: x je QR $\Leftrightarrow$ $x^{\frac{p-1}{2}} \overset{p}{\equiv} 1$. (Eulerovo kritérium)

  Dk: $(g^{2k})^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{k(p-1)} \equiv 1^k \equiv 1$

  $(g^{2k+1})^{\frac{p-1}{2}} \equiv g^{k(p-1)} \cdot \underbrace{g^{\frac{p-1}{2}}}_{\text{tohle je } \sqrt{1}\text{, takže } -1} \equiv -1$

  $x^{\frac{p-1}{2}}$ je tedy homomorfismus $\mathbb{Z}_p^* \to (\{-1,1\},\cdot)$ indikující QR (Legendrův symbol)

- Jak počítat $\sqrt{x}$?
  - pokud $p = 4t+3$: $\left(x^{\frac{p+1}{4}}\right)^2 \equiv x^{\frac{p+1}{2}} \equiv \underbrace{x^{\frac{p-1}{2}}}_{1 \text{ dle Eul. kritéria}} \cdot x \equiv x$
  - pro $p = 4t+1$: randomizovaný alg. [Tonelli 1891, Shanks 1973]
- Odmocniny mod složené N: Pokud umíme N faktorizovat, použijeme CRT, jinak těžké.

$\boxed{\text{RSA}}$ [Rivest, Shamir, Adleman 1978; GCHQ 1973, but public 1997]

Klíč: $n = p \cdot q$ $\quad$ p, q dvě různá velká prvočísla [modulus]

$\varphi(n) = (p-1)(q-1)$

e t.ž. $e \perp \varphi(n)$ [šifrovací exponent]

d t.ž. $ed \equiv 1 \pmod{\varphi(n)}$ [dešifrovací exponent]

$\to$ šifrovací klíč (e,n), dešifrovací klíč (d,n). $\to$ 1 veřejný, 2. tajný

idea: bez faktorizace n je těžké z jednoho klíče spočítat druhý

Šifra: $E(x) = x^e \bmod n$, $D(x) = x^d \bmod n$ $\}$ zprávy jsou prvky $\mathbb{Z}_n$

Korektnost: $(x^e)^d \equiv x^{ed} \equiv x^{k\cdot\varphi(n)+1} \equiv \underbrace{\left(x^{\varphi(n)}\right)^k}_{1} \cdot x \equiv x.$

! Tohle selže, pokud $x \not\perp n$

$\to$ mohu důkaz opravit pomocí CRT (dokáži zvlášť mod p a mod q)

$\to$ ale pokud se do takového x trefím, mám jiné problémy ☺

Efektivita: Poly, ale pomalé… často stavíme hybridní šifru z RSA a sym. šifry

Triky na zrychlení:
- volím malý e (veřejný) (třeba 3 nebo 17)
- dešifrování pomocí CRT (menší čísla ⇒ rychlejší aritmetika) (to v tajném směru modulu)

Důležité vlastnosti:
- komutuje: $D_{k1}(D_{k2}(E_{k1}(E_{k2}(x)))) = x$ (pro klíče se stejným modulem)
- klíče lze prohodit (ale nebývá bezpečné používat oba směry v jednom protokolu)

- **homomorfní šifra:** $E(x \cdot y) \equiv E(x) \cdot E(y)$

↳ to je většinou spíš k vzteku, ale má to i hezké aplikace:

Slepé podpisy
- Alice podepisuje libovolné zprávy (šifruje je tajným e)
- Bob si chce nechat podepsat x, ale nechce, aby ho A. znala
- Bob vygeneruje $r \in_R \mathbb{Z}_n^*$, pošle Alici $x \cdot r^d \bmod n$.
- Alice spočítá $(x \cdot r^d)^e \equiv x^e \cdot r^{ed} \equiv x^e \cdot r$
- Bob výsledek vynásobí inverzí r a získá x^e.
- Alice (až na případy $x \notin \mathbb{Z}_n^*$) nezjistí o x nic.

(viz protokoly na digitální peníze)

Útoky:
- pokud $x < n^{1/e}$, stačí spočítat odmocninu v $\mathbb{Z}$, což je poly.
- známe-li $\varphi(n)$, můžeme faktorizovat n: $\left.\begin{array}{l} n = pq \\ \varphi(n) = \underbrace{(p-1)(q-1)}_{pq-p-q+1} \end{array}\right\}$ soustava rovnic, snadno řešitelná
- je-li $d < n^{1/4}$, lze ho spočítat z e [Wiener 1990]
  ⇒ malý si můžeme dovolit jen veřejný exponent
- z d, e lze spočítat $\varphi(n)$ randomizovaným alg. (viz Stinson & Paterson)
- **Meet in the middle:** … máme $c = m^e$ (c známe, m neznáme)

↳ našli jsme u, v: $u^e \equiv c \cdot v^{-e}$

$u^e \cdot v^e \equiv c$

$(uv)^e \equiv c$

$uv \equiv m$

Jak velká u, v potřebujeme?

$$\Pr[\exists\, u, v \leq n^{\frac{1}{2}+\varepsilon} : uv \equiv m] \geq \text{const.}$$

⇒ útok hrubou silou stihneme za $\sim\sqrt{n}$ pokusů!

- <u>Podobné zprávy</u>: Pokud známe $c \equiv m^e$, $c' \equiv (m+\delta)^e$
  ~~ale~~ ... m je spol. kořen polynomů $p(x) = x^e - c$, $p'(x) = (x+\delta)^e - c'$
  $\rightarrow$ pokud $\underbrace{\text{je } \gcd(p,p') \text{ lineární}}_{\text{nastane s velkou pstí}}$, známe m.

  potřebuji malé e

- <u>Částečně známé zprávy</u>: stačí hádat neznámé bity (netriviální!)
- <u>p, q blízko u sebe</u> $\rightarrow$ faktorizace:
  Nechť $q = p + 2d$. Potom $n = pq = p(p+2d) = p^2 + 2dp$,
  takže $n + d^2 = p^2 + 2dp + d^2 = (p+d)^2$
  $\Rightarrow$ mohu zkoušet různá d a odmocňovat $n + d^2$.
- Více klíčů používá <u>stejný modul</u>: Jednak může každý majitel priv. klíče faktorizovat n, jednak při poslání téže zprávy více příjemcům může Eva dešifrovat. [bez důkazu, viz Stinson, cvič. 6.17]
- <u>Tatáž zpráva zašifrovaná klíči s různými moduly</u>:
  ukážeme pro $e = 3$ a 3 odchycené zprávy.

  toto je lepší

  Víme: $x^3 \equiv c_1 \pmod{n_1}$
  $x^3 \equiv c_2 \pmod{n_2}$
  $x^3 \equiv c_3 \pmod{n_3}$

  Nyní: $N := n_1 \cdot n_2 \cdot n_3$
  jistě $x^3 < N$
  ... ale díky CRT je toto x^3 jednoznačně určeno zbytky c_1, c_2, c_3
  $\rightarrow$ umíme najít x^3 v $\mathbb{Z}$
  $\rightarrow$ stačí odmocnit v $\mathbb{Z}$.

- <u>Chyba při výpočtu</u>
  - Nechť Alice podepisuje tajným klíčem s optimalizací pomocí CRT
  - Opakovaně podepisujeme 1 zprávu, x, dostáváme $x^e \bmod n$.
  - Pokud A. udělá chybu při výpočtu BÚNO zbytku mod p, vydá výsledek lišící se o násobek q: $\gcd(\text{výsledek} - x^e \bmod n, n)$ prozradí q!

  $\Rightarrow$ útočník se může snažit chyby uměle vyvolávat.

Sémantická bezpečnost RSA

↳ žádná vlastnost plaintextu (efektivně testovatelná) nemá jít efektivně zjistit z ciphertextu

- RSA zachovává Jacobiho symbol (to je cca 1 bit informace)

Df: • Legenderův symbol $\left(\frac{a}{p}\right)$ pro p prvočíslo $\equiv a^{\frac{p-1}{2}} \bmod p$

Pozn.: $+1$ pokud a je QR, -1 není-li QR, 0 pro $p \mid a$

• Jacobiho symbol to generalizuje pro liché složené $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$:

$$\left(\frac{a}{n}\right) := \left(\frac{a}{p_1}\right)^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \left(\frac{a}{p_k}\right)^{\alpha_k}$$

$\left(\frac{a}{n}\right)$ je hom. ze $\mathbb{Z}$ do $\{-1,0,+1\}$)

Pozn.: 0 pokud $\gcd(a,n) > 1$, jinak je to ± 1 → $-1 \Rightarrow a$ není QR

$+1 \Rightarrow$ může, ale nemusí

↳ pro $a \perp n$ je $\Pr\left[\left(\frac{a}{n}\right) = 1\right] = 1/2$

$\Rightarrow \left(\frac{a}{n}\right)$ nese 1 bit informace

- $\left(\frac{ab}{n}\right) = \left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{b}{n}\right)$ [nejprve dokážeme pro L. symbol]
- existuje poly alg. pro výpočet $\left(\frac{a}{n}\right)$, který nepotřebuje faktorizaci n

využívá $\left(\frac{a}{n}\right) = \left(\frac{a'}{n}\right)$ pro $a' \equiv a \pmod n$

$\left(\frac{a}{n}\right) \cdot \left(\frac{n}{a}\right) = (-1)^{\frac{a-1}{2}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}}$ [Gaussův zákon kvadratické reciprocity – netriviální]

a pak je podoben Euklidovu alg.

... ale to je jediné známé prosakování informace!

- Def. $\mathrm{half}(x) := [D(x) > n/2]$, $\mathrm{parity}(x) := D(x) \bmod 2$

↑ indikátor 0/1

Věta: Umíme-li ~~z~~ ~~[illegible]~~ spočítat $\mathrm{half}(x)$, umíme i ~~[illegible]~~ počítat $D(\ldots)$.

(máme-li na to orákulum) (tedy invertovat RSA)

Dk: ~~Zapišme x jako $n \cdot \alpha$, kde $\alpha \in [0,1)$, mějme~~
~~half(. Mějme [illegible] $c = m$~~

Mějme $y = x^e$. Známe y, chceme zjistit x.

Jistě je $x = n \cdot \alpha$ pro nějaké $\alpha \in [0,1)$, které zapíšeme binárně.

$\mathrm{half}(y)$ nám řekne nejvyšší bit α

$\mathrm{half}(y \cdot 2^e)$ nám řekne nejvyšší bit $2\alpha \bmod 1$,

$D(y \cdot 2^e) = 2x$ což je 2. nejvyšší bit α

... atd. a za $\log n$ pokusů známe α': $|\alpha - \alpha'| < \frac{1}{2n}$

$\Rightarrow \alpha' \cdot n$ po zaokrouhlení dá x.

Analogicky pro parity(x). Ono totiž platí: (34)

- $\text{half}(x) = \text{parity}(x \cdot 2^e)$ $\Rightarrow$ pomocí orákula pro paritu můžeme počítat half v předchozím důkazu.

Padding – nechceme pomocí RSA šifrovat surovou informaci (hrozí, že bude moc malá apod., stejně tak RSA je deterministické $\Rightarrow$ není CPA-bezpečné)
↳ a hrozí multi-modulový útok

PKCS #1 v1.5
↑ Public-key Crypto. Std. od RSA Security inc.

00 02 [random] 00 [zpráva]

- random: ↑ aspoň 8 náhodných bytů různých od 00
- 00: část se nevyužije, pokud $\lceil \log n \rceil$ není násobek 8
- 02: typ paddingu (00 a 01 jsou deterministické)

Bleichenbacherův útok [1998]: zneužití paddingového orákula (řekne, zda dešifrovaná zpráva má správný formát paddingu – to může být třeba časový postranní kanál)

Nechť x je správně opadovaná zpráva, známe $y = x^e$.
↳ $2B \le x < 3B$ pro nějakou mocninu dvojky B (danou pozicí 02 v paddingu)

Ptáme se orákula na $y \cdot s^e$ pro různá s ... tedy zda $x \cdot s$ je správná.
Odhadneme Pr, že to tak bude (heuristicky - předpokládáme náhodnost D)

① $\Pr[\underbrace{2B \le xs \bmod n < 3B}] \ge 2^{-16}$
nejvyšších max. 16 bitů má správný tvar

② $\Pr[\text{za 00 02 je 8 nenul a pak aspoň 1 nula}]$
$= \left(\frac{255}{256}\right)^8 \cdot \left(1 - \left(\frac{255}{256}\right)^{k-10}\right) \ge 0.18$
(k: # bytů; ≥ 0.18 pro $k \ge 64$ (aspoň 512b klíč))

} $\Pr[\text{obojí najednou}] \ge 2.8 \cdot 10^{-6}$
$\Downarrow$
cca za průměrně 10^6 pokusů se to povede

Co se dozvíme o x?

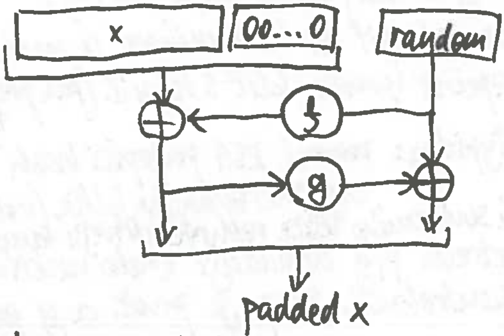
- $2B \le xs \bmod n < 3B \Rightarrow \exists r: 2B \le xs - rn < 3B$
$\Rightarrow \exists r: \left\lceil \frac{2B + rn}{s} \right\rceil \le x \le \left\lfloor \frac{3B - 1 + rn}{s} \right\rfloor$

To je nějaký interval ... ale my neznáme r $\Rightarrow$ spousta intervalů ($\sim 2^{16}$)

Velmi zhruba: začneme intervalem $[2B, 3B)$,
každý další pokus ho protne se sjednocením intervalů.
Heuristicky: intervalů dlouhodobě ubývá a zkracují se
⇒ časem je x jednoznačně určeno.

PKCS #1 v2.0 – protokol OAEP, netrpí těmito neduhy
– v podstatě je to Feistelova síť se 2 rundami

díky tomu je reverzibilní



f, g jsou hešovací funkce

Obecně k bezpečnosti RSA

- spoléhá na obtížnost faktorizace (ale není s ní ekvivalentní!)
- má algebraickou strukturu ⇒ randomizujeme, hešujeme atd.
- je potřeba používat ho velmi opatrně

Rabinův kryptosystém – založený na diskrétních odmocninách

Tajný klíč: prvočísla p, q
Veřejný klíč: $n = p \cdot q$
$E(x) = x^2 \bmod n$
$D(y)$ počítá diskrétní odmocninu
- to jde se znalostí faktorizace lehko (zvlášť mod p, mod q, pak CRT)
- pozor, vyjdou 4 možná řešení, je nutno nějak zjednoznačnit (hash?)

To bohužel také ukazuje, že CCA faktorizuje n!

Bezpečnost: Pokud umíme dešifrovat, umíme i faktorizovat modul (aspoň randomizovaně):
$a \leftarrow$ náhodné ze $\mathbb{Z}_n$
$b \leftarrow D(a^2)$
Pokud $a = \pm b$ ⇒ FAIL
Jinak ⇒ $\gcd(a-b, n)$ je faktor n

b je s pstí aspoň $3/4$ jiná odmocnina než a
-- s pstí $1/2$ to není ani $-a$
⇒ liší se o násobek p nebo q

Diffieho-Hellmanova výměna klíčů

- Veřejné parametry: prvočíslo p, generátor g grupy $\mathbb{Z}_p^*$
- Alice vygeneruje $x \in \{0 - p-2\}$ a pošle Bobovi $g^x \pmod p$
  Bob —"— $y \in \{0 - p-2\}$ —"— Alici $g^y \pmod p$
  $\Rightarrow$ oba umí spočítat $g^{xy} = (g^x)^y = (g^y)^x$,
  ale Eva nikoli (leda by uměla počítat diskrétní log) ← nicméně tohle není ekvivalentní
- Pozor, aktivní útočník může vstoupit do komunikace a nechat každou stranu, ať si bezpečně vymění klíč s ním ☺ (pak přeposílá zprávy)
  $\Rightarrow$ nutno podepisovat! Typicky: pomocí RSA podepíší hash vygenerovaného klíče (v obou směrech)
  (dopředná bezpečnost: prozrazení soukromého klíče neohrozí dřívější komunikaci)
- Pokud se strany na parametrech p, g dohadují (nebo nevěříme tomu, kdo je stanovil), musíme kontrolovat, že p je prvoč. a g generátor (obojí už umíme)
  $\Rightarrow$ jinak útočník zvolí g, které generuje dost malou podgrupu, aby v ní uměl logaritmovat ☺
- Podobně by aktivní útočník mohl najít k takové, aby g^k generovalo malou podgrupu, a pak vyměnit g^x za $(g^x)^k$ a podobně g^y za $(g^y)^k$ $\Rightarrow$ tím Alici i Boba zahnal do podgrupy.
  (A oni by pak spokojeně podepsali vygenerovaný klíč...
  lépe: podepisovat celý průběh protokolu)
- DH prozrazuje 1 bit: z $\left(\frac{g^x}{p}\right)$ se pozná lichost x, podobně lichost y
  $\Rightarrow$ umíme poznat $\left(\frac{g^{xy}}{p}\right)$, tedy zda protokol vygeneruje QR.
- $\mathbb{Z}_p^*$ má určitě 2 podgrupy: $\underbrace{\{-1,1\}}_{\text{řádu } 2}$ a $\underbrace{QR}_{\text{řádu } \frac{p-1}{2}}$.

Pokud $\frac{p-1}{2}$ je prvočíslo (tedy $p = 2q+1$), pak už žádné jiné.
$\Rightarrow$ nikdo nás do nich nezažene.
A pokud se budeme pohybovat v podgrupě QR, už nebudeme ani vyzrazovat informace.
$\Rightarrow$ místo generátoru tedy použijeme g^2 + testujeme, zda g^x, g^y leží v podgrupě.

- Abychom se vyhnuli velkým exponentům…
  Zvolíme $p = kq + 1$, kde q má cca 256 b, p výrazně více.
  Pracujeme v podgrupě generované g^k, ta má q prvků.
  $\Rightarrow$ Opět kontrolujeme, zda se držíme v této podgrupě $(a^q = 1)$
  a opět nás nikdo nemůže zahnat do menší.
- Obecně: DH funguje v grupách, v nichž je dlog těžký
  a které nemají netriviální podgrupy
- $p = 2q + 1$ je obecně bezpečné ($p-1$ nesmí mít samé malé faktory, jinak umíme dlog)
- Sémantická bezpečnost: zjistit nejnižší bit je stejně těžké jako zjistit všechno (podobně jako RSA)
- DH: lze používat asymetricky: veřejný klíč je g^x, tajný x.
  (jedna strana protokolu se provede offline, druhá výcekrát online)

ElGamalův kryptosystém – asym. šifra založená na dlog

Parametry: prvočíslo p, generátor g grupy $\mathbb{Z}_p^*$

Klíče: $k \in_R \{0 \ldots p-2\}$ $\rightarrow$ tajný klíč k
$h = g^k \bmod p$ veřejný klíč h

Šifrování: $t \in_R \{0 \ldots p-2\}$ $\rightarrow$ pošleme zprávu (g^t, y)
$s = h^t \ (= g^{kt})$ ← rovnoměrně náhodný prvek $\mathbb{Z}_p^*$
$y = x \cdot s$ ← taktéž, neboť s je invertibilní

Dešifrování: $s = (g^t)^k$ … rekonstruujeme sdílené tajemství s
$x = y \cdot s^{-1}$ … pomocí s dešifrujeme

tohle je vlastně DH: 1. krok při generování klíče, 2. krok při šifrování. Tím vyměníme s a pak jím zašifrujeme x.

Na rozdíl od RSA musí být šifr. klíč veřejný a dešifr. tajný, protože z dešifr. umíme udělat šifr.

! randomizace je kritická, jinak z known plaintextu spočítáme s **!**

Podobně jako RSA prozrazuje, zda x je QR

… ale to jde snadno napravit vybíráním zpráv jen z množiny QR

① pokud k je sudé: $\left(\frac{h}{p}\right) = \left(\frac{g}{p}\right)^k = (-1)^k = 1$
$\Rightarrow \left(\frac{h^t}{p}\right) = 1 \Rightarrow \left(\frac{x}{p}\right) = \left(\frac{y}{p}\right)$

poznám z veřej. klíče

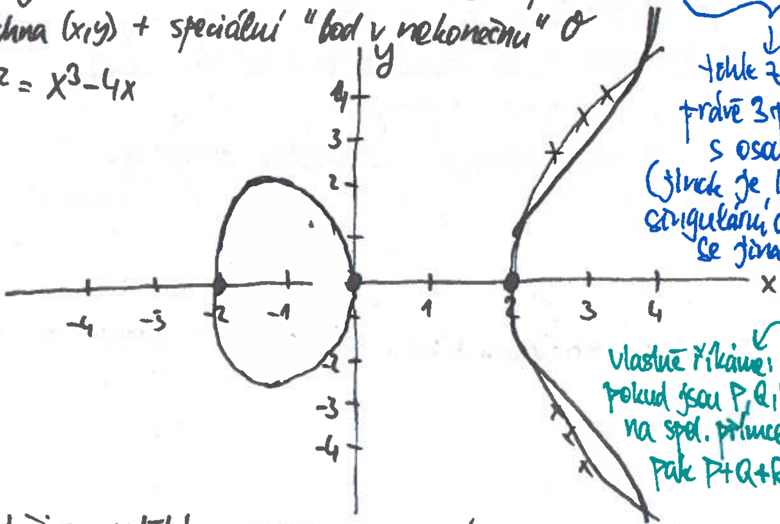
② pokud k je liché: $\left(\frac{h}{p}\right) = -1$
$\left(\frac{s}{p}\right) = \left(\frac{h^t}{p}\right) = (-1)^t = \left(\frac{g^t}{p}\right)$
$\Rightarrow \left(\frac{y}{p}\right) = \left(\frac{x}{p}\right) \cdot \left(\frac{g^t}{p}\right)$

Obecně: ElG. lze provozovat v jakékoliv grupě, v níž je dlog těžký (podobně jako DH)

$\boxed{\text{Eliptické křivky}}$ – dobrý zdroj malých grup s těžkým dlogem

- Nad reálnými čísly: uvažme množinu všech $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ t.ž.
$$y^2 = x^3 + ax + b \quad (\text{kde } a,b \text{ jsou param. t.ž. } \underbrace{4a^3+27b^2 \neq 0}_{})$$
  tohle zaručuje právě 3 průsečíky s osou x (jinak je křivka singulární a chová se jinak)

  $\mathcal{E}$:= všechna (x,y) + speciální "bod v nekonečnu" $\mathcal{O}$
- Příklad: $y^2 = x^3 - 4x$



Vlastně říkáme: pokud jsou P, Q, R na spol. přímce, pak $P+Q+R=\mathcal{O}$

- Z bodů na křivce uděláme grupu s operací + a neutrálním prvkem $\mathcal{O}$
  Jak vypadá $P+Q$ pro $P=(x_1,y_1)$ a $Q=(x_2,y_2)$:
  1. $x_1 \neq x_2$: uvážíme přímku PQ. Ta křivku protne ve 3 bodech: P, Q, R.
     Za výsledek prohlásíme zrcadlový obraz bodu R podle osy x.
  2. $x_1 = x_2$, $y_1 = -y_2$: výsledek je $\mathcal{O}$
  3. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$: podobně jako 1, ale přímka bude tečna v bodě $P=Q$.

  Triviální: $P+Q = Q+P$, $P + (-P) = \mathcal{O}$
  ↑ překlopení znaménka y

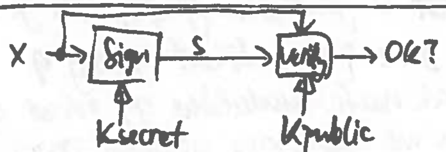
  Netriviální: + je asociativní (lze dokázat pracně mechanicky nebo vybudovat hlubokou teorii)
- Totéž můžeme budovat nad konečným tělesem mod $p>3$ → nebo $\mathbb{F}_{p^k}$ pro $p>3$
  [používejeme tytéž formule pro definici +, −]
  → zase vznikne abelovská grupa (komutativní)

  [pro $p=2,3$ to funguje trochu jinak]
- Věta [Hasse]: Je-li $\mathcal{E}$ el. křivka nad tělesem $\mathbb{F}_q$,
  pak: $q+1-2\sqrt{q} \leq |\mathcal{E}| \leq q+1+2\sqrt{q}$.

  → existuje Schoofův alg., který $|\mathcal{E}|$ spočte přesně v poly čase.

- **Věta:** Je-li $(E,+)$ elipt. křivka nad $\mathbb{F}_q$, pak $\exists\, n_1, n_2$:
  $(E,+) \cong \mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2}$, přičemž $n_2 \mid n_1$.
  → pokud $|E|$ je prvočíslo nebo součin různých prvočísel, pak $n_2 = 1$, takže $(E,+)$ je cyklická grupa ⇒ funguje v ní DH. ← jen roli g^k hraje $k \cdot G$ ($k \in \mathbb{N}$, G bod v grupě)
  → jinak můžeme najít cykl. podgrupu velikosti n_1.
- **Komprese bodů:** místo páru (x,y) stačí přenést x + 1 bit, který vybere jednu z možných druhých odmocnin (1 je sudá, druhá lichá ⇒ stačí nejnižší bit)
- **eliptický ElGamal:** DH na křivce, pak hešovací fce z křivky do $\mathbb{Z}_p$, kde provedeme maskování zprávy
- **bezpečné křivky** (s těžkým dlog) není snadné sehnat: na mnoho typů křivek existují efektivní algoritmy na dlog!
  → https://safecurves.cr.yp.to/

Asymetrické podpisy



- Sign může využívat náhodu ⇒ Verify nemusí být triviální
- Cíle útočníka:
  - zjištění tajného klíče
  - existenční padělání (vytvoří podpis nějaké nové zprávy)
  - cílené padělání (podpis předem určené zprávy)
- Možnosti útočníka:
  - zná veřejný klíč
  - zná podpisy nějakých zpráv KPA
  - může si nechat podepsat, cokoli bude chtít CPA
    různé od zadané zprávy
- **podpisy pomocí RSA:** tajný e, veřejný d, $sig = x^e \bmod n$.
  - exist. padělání na základě ~~[illegible]~~ veř. klíče: vyberu si sig, pak $x := sig^d \bmod n$. (to je nejspíš nesmyslná zpráva)
  - ze slepých podpisů plyne cílené padělání při CPA.
  - oprava: zprávu před podepsáním hešuji.

- **ElGamalův podpis** (založený na dlogu)

  nelze přímo vyrobit z ElGamalovy šifry, neboť ta neumí šifrovat tajným klíčem a dešifrovat veřejným

  - Parametry: p, g (jako u DH)
  - Tajný klíč: $k \in_R \{2 — p-3\}$
  - Veřejný klíč: $a = g^k \bmod p$
  - Podpis(x): $t \in_R \{2 — p-3\}$ t.ž. $t \perp p-1$

    $$\left.\begin{aligned} r &\equiv g^t \pmod p \\ s &\equiv (x - kr)\cdot t^{-1} \pmod{p-1} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{podpis } (r,s)$$

    splňující $kr + st \equiv x \pmod{p-1}$
  - Verify(x,r,s): ① $0 < r < p$, $0 < s < p-1$

    ② $g^x \equiv a^r \cdot r^s \pmod p$
  - proč funguje: $a^r \cdot r^s \equiv g^{kr} \cdot g^{\cancel{t}(x-kr)\cdot \cancel{t^{-1}}} \equiv g^x$
  - opět nepříjemné algebraické vlastnosti ⇒ hešujeme
  - lze provést v jakékoliv grupě, kde je dlog těžký
    - ⇒ pak je z $p-1$ velikost grupy q
    - ⇒ r pak navíc modulíme q, pokud vyjde 0, přegenerujeme t

  navíc má zabudované hešování zprávy

- **Digital Signature Algorithm** [NSA 1994]
  - Parametry: $p = c \cdot q + 1$ (p je ~4kbit, q cca 256b), g je generátor podgrupy $\mathbb{Z}_p^*$ velikosti q (třeba c-tá mocnina generátoru $\mathbb{Z}_p^*$)
  - Tajný klíč: $k \in_R \{1 — q-1\}$
  - Veřejný klíč: $a = g^k \bmod p$
  - Sign(x): $t \in_R \{1 — q-1\}$

    $r \equiv (g^t \bmod p) \bmod q$, pokud $r \not\equiv q$, znovu

    $s \equiv t^{-1} \cdot (\mathrm{hash}(x) + kr) \bmod q$, pokud $s \not\equiv q$ restart

    → podpis (r,s) (příjemně krátký)
  - Verify(x,r,s): $s^{-1} \bmod q$

    $u_1 \equiv \mathrm{Hash}(x) \cdot s^{-1} \pmod q$

    $u_2 \equiv r \cdot s^{-1} \pmod q$

    check $(g^{u_1} \cdot a^{u_2} \bmod p) \equiv r \pmod q$

- Proč to funguje: z $S \equiv_q t^{-1}(h(x)+kr)$
  dostaneme $t \equiv_q S^{-1}(h(x)+kr) \equiv \underbrace{S^{-1}h(x)}_{u_1} + \underbrace{S^{-1}kr}_{u_2 \cdot k}$

  Proto $g^t \equiv_p g^{u_1} \cdot \underbrace{g^{u_2 k}}_{a^{u_2}}$

  tohle dá r po modulo q

- Podobně ECDSA s eliptickou křivkou: místo $g^{\text{něco}}$ operace v grupě křivky.

! Ve všech variantách DSA / ElGamala nesmíme opakovat t

Pro obyč. ElGamala:

① Pokud se prozradí t, pak: víme $\overbrace{S \equiv (x-kr)\cdot t^{-1} \pmod{p-1}}^{\text{vše kromě } k \text{ známe}}$

$$ts \equiv x - kr$$
$$kr \equiv x - ts$$
$$k \equiv (x-ts)\cdot r^{-1}$$ a mám taj. klíč

② Pokud zopakujeme t, zopakuje se i r $\Rightarrow$ pro zprávy x_1, x_2 máme podpisy $(r,s_1), (r,s_2)$.

Z definice: $g^{x_1} \equiv_p \underbrace{a^r}_{g^{kr}} \cdot \underbrace{r^{s_1}}_{g^{ts_1}} \Rightarrow x_1 \equiv_{p-1} kr + ts_1$

$$\Rightarrow x_2 \equiv_{p-1} kr + ts_2$$
$$\Downarrow$$
$$x_1 - x_2 \equiv_{p-1} t(s_1 - s_2)$$

$\Rightarrow$ kdykoliv $s_1 - s_2 \perp p-1$, umíme zjistit $t \Rightarrow$ ①

Oprava (dnes již běžná): t generuji PRNG seedovaným zprávou x a klíčem (třeba pomocí houbovité funkce)

Typické protokoly

⓪ vyměníme si nonce (proti replay)
① vygeneruji náh. klíč (master secret)
② pošlu zašifrovaný veř. klíčem protistrany
③ oba podepíšeme dosavadní průběh protokolu
④ ostatní klíče odvozeni z hlav. klíče

nebo DH výměna klíčů $\Rightarrow$ pak získám dopřednou bezpečnost (ani vyzrazení taj. klíčů neumožní dešifrovat staré zprávy)

typicky pak symetr. šifra a MAC

Implementační záležitosti

- neumíme navrhovat bezpečný SW … největším nepřítelem je komplikovanost
- neumíme ho ani implementovat
  - testování bezpeč. chyby neodhalí (fuzzing trochu pomáhá)
    … ale při vývoji na to obvykle spoléháme
  - píšeme v Céčku ⇒ buffer overruns
  - nepíšeme v Céčku ⇒ side channels je nemožné kontrolovat
- příliš mnoho závislostí: SW i HW
  … navíc většina z nich není optimalizovaná na bezpečnost
- reálný útočník má k dispozici víc informací a možností zasahovat než útočník teoretický :-((někdy postranní kanály)
  - útočník po síti: – časovací útoky (memcmp, padding orákula, …) data-dependent instruction timing

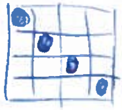
    Chceme, aby primitiva trvala vždy stejně dlouho

    – generování nekorektních dat / nejednoznačných
      → útoky na parser
      → v jakém formátu jsou data?
      (JPEG ∩ Java, UTF-8 malformed …)
      zero-terminated / counted strings
      JSON každý parsuje trochu jinak

    – zaklčení příjemce, zahlcování stavu
      XML také, třeba <!--->
  - v téže místnosti: – měření spotřeby (modular exponentiation v RSA)
    - elmag. záření (včetně Power LED)
    - zvuk (klávesy, pískání měničů) → lze snímat chvění oken
    - tepelné stopy (třeba po hesle)
    - ovlivňování výpočtu elmag. pulsy, napájením atd.
  - fyzický přístup k počítači:
    - "cold boot attack" (vč. tekutého dusíku)
    - přidání špehujícího HW
    - ozvěny ve vypnuté paměti
  - jiný program na tomtéž stroji: (třeba Javascript)
    - HW side-efekty (třeba kešové) ← zejména s HyperThreadingem
    - CPU bugs (spekulativní provádění instrukcí může mít měřitelné efekty!)

Příklad: Kešový útok na AES … synchronní verze (na tomtéž stroji běžím těsně před/po AES), chosen plaintext
[Bernstein 2005] (128b klíč)

Typ. implementace rundy: ① XOR rundovního klíče (v první rundě celý klíč)

②  → $(T_0(a_0) \oplus T_1(a_1) \oplus T_2(a_2) \oplus T_3(a_3))$ — tabulky 256 × 32b — tohle se snadno dá naencrypt

1. ~~řádek~~ sloupec výsledku

a podobně pro další 3 ~~řádky~~ sloupce, posunuté diagonály, tytéž tabulky

10 rund, poslední atypická (jiné 4 tabulky)

- keš má 64B bloky ⇒ 16 položek tabulky na blok ⇒ z čísla bloku poznáme 4 bity stavu ⇒ pro známý plaintext 4 bity klíče

ovšem v dalších rundách se do keše otisknou další přístupy do tabulek … (víceméně náhodné)

Nechť j je blok v T_i, do kterého se neotiskne 1. přístup … provedeme ještě $9 \cdot 4 - 1 = 35$ přístupů do téže tabulky

⇒ $Pr[\text{žádný z nich se nestrefí do } j] = (1 - 1/16)^{35} \doteq 0.1$

⇒ při malém počtu náhodných pokusů izolujeme jediný řádek, ke kterému se přistoupí vždy

- z první rundy máme 64 bitů klíče, trochu sofistikovanější útok na 2. rundu pak dává zbylých 64 :)
- stačí měřit rychlost AES v závislosti na vstupu, funguje i pro known plaintext místo chosen
- Nyní nejlepší: řádově stovky pokusů bez znalosti plaintextu (!)
- Obrana: bit-slicing implementace S-boxů (tohle je problém každé šifry s velkými S-boxy)
  HW implementace AES (v CPU)

Ukládání tajemství

- klíče v paměti: mohou skončit na disku (swap, core dump, …) nebo na síti (po uvolnění paměti někdo alokuje paket a inicializuje jen částečně)
- klíče v registrech: mohou skončit v paměti (typ. zásobník)
- best practices:
  - mlock & vypnutí core dumpů
  - po použití smazat
  - případné dělení tajemství na 2 části

- tajná data na disku: nutno přemazat (jak důkladně?)
  - pozor na: FS (fragmenty putují...)
    realokaci vadných sektorů
    posouvání stop na řádu let
- SSD: mazat prostě neumíme
- existují disky se "safe erase" – interně šifrují AES, pak smaží klíč z EEPROM
  – některé přistiženy při švindlování

Dedikovaný HW

- často v "tamper-proof" provedení
  smart-karty, USB tokeny, TPM apod.
  - filtry na vyhlazení napájení, Faradayova klec
  - jednoduchý deterministický procesor
  - self-destruct při otevření
  - randomizovaná struktura čipů

⇒ luštění je poměrně nákladné, ale umí se.

Důležité: Důvěra ve firmware – většinou chybí (autor má svou vlastní agendu...)

Udržování stavu – nonce, stavy RNG, sériová čísla, apod. se nesmí zopakovat!

- problémy: reboot, power-cycle, obnovení ze zálohy, first boot

Poučení

- nic není dokonalé, vše jde překonat...
- inspirujme se fyzickou bezpečností:
  - cena útoku > cena chráněných dat
  - útočníka chceme zdržet, aby byl chycen (⇒ motivace neútočit)
  - logy, monitorování, ..., aby bylo chycení snazší
  - "požární cvičení" (např. pravidelné změny klíčů)
  - penetration testing

Hesla

Problémy: • jednoduchá hesla lze snadno uhodnout (brute-force, slovníky...)
• složitá hesla se těžko pamatují
• uživatelé jsou lidé ⇒ papírky s hesly, totéž heslo na více místech...
• jak nastavit politiku hesel?

A co když ze serveru unikne DB uživatelů s hesly? — problém kvůli tomuto

• hesla hešujeme ... ale útočník stále může provést brute-force útok offline
• předpočítané tabulky hešů, 1. pokus:
  - heslo → hash → jiné heslo
    funkce vzorkující prostor nadějných hesel
    nějaká fce f
  - řetízky vzniklé iterováním f: $\text{start} \underbrace{\to \to \to \to}_{N\ \text{kroků}} \text{konec}$
    - prostor hesel pokryjí řetízky
    - z každého si uložím začátek a konec
    - z neznámého heše zkusím N kroků, než se trefím do konce řetízku; pak najdu začátek a od něj ... předchůdce heše.
    - v ideálním případě zmenším paměťové nároky tabulky N-krát za cenu N-krát pomalejšího hledání
  - problém: řetízky srůstají ⇒ k 1 konci může patřit víc začátků, R řetízků pokryje ≪ N·R hesel.
• duhové tabulky (Rainbow tables)
  - v každém kroku řetízku použiji jinou vzorkovací fci – "barvy"
  - pokud se 2 řetízky potkají, brzy se zase rozejdou ⇒ téměř OK.
  - při hledání potřebuji zkoušet všechny možné pozice v řetízku
    ⇒ hledání zpomalují N^2-krát, paměť redukuji cca N-krát.

Příklad: project-rainbowcrack.com
pro SHA-1, ASCII, 1-8 znakové hesla: 460 GB tabulka

Obrana proti brute-force útokům:
• "solení" hesel: hesla hešuji s noncí, tu uložím spolu s hešem
  ⇒ z hešů nepoznám, že 2 hesla jsou stejná
  ⇒ duhové tabulky nepomohou

- iterování hešů: nám 1000× zpomalení ověřování hesla nevadí, útočníkovi zato zásadně :)

  ↑ tzv. **key stretching** ~ iterováním hešů také můžeme vyrobit PRNG seedovaný heslem a získat tak z hesla klíč vhodné délky

- jiný přístup: neuložíme část nonce, takže musíme zkoušet :)

  ↳ tzv. **key strengthening**

→ **Příklad:** **PBKDF2** (Password-Based Key Derivation Function)

- odvozená z libovolné PRF (pseudonáhodná fce s klíčem, typicky HMAC)
- výstup: $B_1\ B_2\ B_3 \dots$ (podle požadované délky výstupu)

přičemž: $B_i = U_1^i \oplus U_2^i \oplus \dots \oplus U_c^i$ ← # iterací

$U_1^i = PRF(\text{password}, \text{sůl} \,\|\, i)$

$U_{j+1}^i = PRF(\text{password}, U_j^i)$

↑ pokud je moc dlouhé, tak jeho heš (tím vznikne 2. ekviv. hesla)

Další vývoj: snažíme se zkomplikovat paralelizaci na GPU/FPGA

⇒ typicky zvýšením požadavků na paměť

(to vše jen kvůli slabým heslům, silná nepotřebují ani iterace)

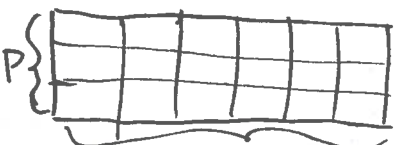
↓

$\boxed{\text{Argon2}}$ (náčrtek)

Parametry: M = množství paměti

P = stupeň paralelismu

T = # iterací



1KB bloky tak, aby jich bylo celkem M paměti

Vstupy: heslo

sůl

(taj. klíč, asociovaná data)

↑ nepovinné

- na začátku vyplníme první 2 sloupce heši vstupů a parametrů
- ∀ iterace postupně vyplní všechny sloupce, výsl. přixoruje k pův. obsahu
- používá kompresní fci (1KB, 1KB) → 1KB odvozenou z Blake2 (to je heš odvozený z ChaCha20 ze soutěže SHA-3)

komprimuje blok doleva od akt. (cyklicky) s vybraným předch. blokem.

ne moc blízkým, aby fungovala paralelizace

Varianty:
- deterministicky (podle PRNG)
- v závislosti na datech z levého bloku

Interaktivní autentikace heslem

- **Challenge-response:** server pošle nonci, klient hash(heslo || sůl || nonce) a sůl (pro neexistující username si ji vymyslí) — hash(...)
  - ... riziko: server si musí pamatovat plain-textová hesla
    - ... nebo jejich hashe, ale ty pak musí použít i klient ⇒ nepomůže
- protokol SCRAM (Salted Challenge-Response Authentication Mechanism)
  - určím sůl a #iteraci
  - z hesla odvodím $K_c = \text{HMAC}(\text{heslo}^*, \text{"Client Key"})$
    $K_S = \text{HMAC}(\text{heslo}^*, \text{"Server Key"})$
    heslo* = PBKDF2(heslo, sůl, #iter.)
  - server si pamatuje: username, sůl, #iteraci, K_S, hash(K_c)
  - průběh:

klient		server
	username, $nonce_c$ →	
	← $nonce_c$, $nonce_s$, salt, #iter	
	$nonce_c$, $nonce_s$, connection ID, $proof_c$ →	
	← $proof_s$	

$proof_c = key_c \oplus \text{HMAC}(H(key_c), \text{Auth})$ — historie protokolu

$proof_s = \text{HMAC}(key_s, \text{Auth})$

  - pokud znám $H(key_c)$, mohu rekonstruovat key_c (pak ho chci rychle zahodit...)

Kerberos [MIT 198x] – distribuovaná správa klíčů pomocí sym. kryptografie

- protokolu se účastní "principálové" – klienti a servery
  - Ticket Granting Service – má s každým principálem společný taj. klíč
  - když A chce mluvit s B, pořídí si tiket T_{AB}:
    - A pošle TGS: $\{B, time\}_{K_{A,TGS}}$ ← zašifrováno pomocí
    - TGS vyrobí session key $K_{A,B}$ a pošle A: $\{K_{A,B}\}_{K_{A,TGS}}$, $T_{A,B}$
      kde tiket $T_{A,B} = (B, \{A, \text{adresa } A, \text{time range}, K_{A,B}\}_{K_{B,TGS}})$
    - A přepošle $T_{A,B}$ A → B
    - B případně pošle $\{time\}_{K_{A,B}}$, aby se také autentikoval
    - dále už šifrujeme pomocí $K_{A,B}$ zprávy mezi A, B.

! potřebujeme synchronizované hodiny aspoň $\underbrace{\pm \text{pár minut}}$ po které si pamatujeme pakety
↳ jak to udělat bezpečně?

Ve skutečnosti: (Kerberos v5)

- TGS je služba jako každá jiná ⇒ klient pro ni má také tiket (TGT)
- místo klíčů z tiketů (které mohou mít dlouhou životnost) používáme autentikátory pro specifické sessions:

$$A_{A,B} = \{A, \text{timestamp}, \text{session key}\}_{K_{A,B}}$$ ← z tiketu

↑ na 1 použití – během replay okna si pamatuji všechny, co jsem viděl

- klient se může prvotně autentikovat heslem: ~~autorizační~~ autentikační server umí vydat TGT zašifrovaný hešem hesla
- abychom zabránili offline útokům na hesla: preautentikace – pošlu auth. serveru timestamp zašifrovaný hešem hesla

---

$\boxed{\text{DNSSEC}}$ – Secure Domain Name System

- DNS:
  - strom doménových jmen
  - ve vrcholech záznamy různých typů (A, AAAA, MX, ...)
  - delegace subdomén → NS záznamy, zóny vs. domény
- každá zóna obsahuje klíč (záznam DNSKEY)
- klíčem podepisujeme záznamy (pro jméno + typ → záznam RRSIG)
- nadřazená zóna podepíše klíč podřízené (záznam DS, kde je NS)
- můžeme používat více klíčů:
  - rotace klíčů
  - Zone-signing key vs. Key-signing key

podepisuje záznamy ← Zone-signing key; Key-signing key podepisuje Zone-signing key; Key-signing key ← DS z nadřaz. zóny

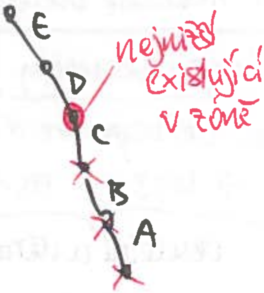
- "root of trust" – množina klíčů, které známe lokálně (třeba od root zóny)
- zónu stačí podepsat offline a pak jen servírovat hotové RRSIGy
- Jak se podepisuje neexistence záznamu? Podepisujeme díry!

X.Y.Z NSEC X'.Y.Z <typy záznamů pro X.Y.Z>

↑ nejbližší další jméno v kanonickém pořadí

- Důkaz neexistence je ale složitější kvůli hranicím zón a wildcardům.

Pro A.B.C.D.E



Vygeneruji:

① NSEC pro D.E dokazující, že D.E existuje a nemá NS

② NSEC pro díru pokrývající celé jméno

③ NSEC dokazující neexistenci *.D.E

- Drobná vada na kráse: záznamy v zóně jde pomocí NSEC enumerovat

→ NSEC3: místo jmen používá jejich heše → díry mezi heši.

Nutno hešovat i všechny předky uvnitř zóny, abych v ② uměl dokázat ∄ C.D.E

Ověřování identity aneb kdo to je na druhém konci „drátu"?

- typicky znám veřejný klíč protistrany, ale nevím, komu patří

- **PKI – Public Key Infrastructure**
  - Certifikační autorita (CA): všichni jí věří a znají její veřejný klíč
    → ke každému klíči vydá certifikát = podepsanou zprávu s hešem veřejného klíče a identitou (a nějakým časovým omezením platnosti)
  - protistrana pak dodá podpis, veřejný klíč a certifikát
    - podpis ↑ ověřím veř. klíčem
    - veřejný klíč ↑ ověřím certifikátem
    - certifikát ↑ ověřím veř. klíčem CA
  - výhody:
    - CA nezná soukromé klíče (oproti Kerberovi)
    - CA je offline, k navázání spojení už není potřeba
    - PKI je univerzální, ověřuje identitu pro všechny aplikace
    - lze decentralizovat zavedením sub-CA a řetězců certifikátů
  - problémy:
    - nenajdeme nikoho, komu věří všichni (ani většina)
    - co vlastně je identita? (Jan Novák, firma na Bahamách, ...)
    - revokace certifikátů (musí být aspoň částečně online)
      ↳ CRL / online protokol / krátkodobé certifikáty

- **Trust On First Use** – SSH, ale vlastně tak používáme i většinu webu.

- **Web Of Trust** – PGP – vzájemné podepisování klíčů, důvěra částečně tranzitivní
  - je pro většinu uživatelů příliš složité

Co tedy funguje? – PKI specifická pro aplikaci (třeba klienti banky)
– TOFU + nezávislé ověření při FU

TLS: Transport Layer Security

- původně SSL vyvinuté firmou Netscape pro HTTPS, dnes všudypřítomné
- evoluce: SSL1 → SSL2 → SSL3 → TLS1.0 → 1.1 → 1.2 → 1.3
  - SSL1: nepublikováno
  - SSL2 až 1.1: obsoletní a děravé
  - 1.2: dnes běžné (o něm budeme mluvit)
  - 1.3: horká novinka
- v podstatě meta-protokol, skoro vše je volitelné
  - šifrování + ~~...~~ MAC
    - proudová šifra + MAC, bloková šifra + MAC } MAC-then-encrypt (!)
    - AEAD (autentikovaná šifra – třeba AES-GCM)
  - PRF pro odvozování klíčů
    - ve starších verzích fixní (založená na HMAC)
    - dnes (1.2) volitelná
  - výměna klíčů: (generuje pre-master secret, z něj master-secret, z ní další klíče)
    - RSA: klient generuje klíč, zašifruje veř. klíčem serveru
    - DH + RSA: fixní parametry DH v certifikátu
    - DHE + RSA: Ephemeral DH, podepisuje parametry veř. klíčem
    - ECDHE + ECDSA: podobně s elipt. křivkami
    - DHE-anon: bez ověření protistrany (MITM!)
    - PSK: pre-shared
    - DHE + PSK: místo certifikátu použije PSK
    - Kerberos

    (a mnoho dalších)
  - server a klient se domluví na cipher suite, ~~...~~ např.:

    $\underbrace{\text{TLS\_ECDHE}}_{\text{key xchg}}\_\underbrace{\text{RSA}}_{\text{auth}}\_\text{WITH}\_\underbrace{\text{AES}}_{\text{cipher}}\_\underbrace{\text{128}}_{\text{keysize}}\_\underbrace{\text{GCM}}_{\text{mode}}\_\underbrace{\text{SHA256}}_{\text{MAC \& PRF}}$
  - komprese
- základem je Record Protocol:
  - posílá po TCP spojení záznamy, v nich zprávy dalších protokolů
  - záznamy mají protokol, typ a délku
  - zajišťuje šifrování a MAC domluvenými alg. (na začátku žádné)

- **Handshake Protocol**

K → S ClientHello – verze protokolu (max. podporovaná)
– client random
– podporované suity a kompresní algoritmy
– seznam rozšíření (typ + délka + hodnota)

← ServerHello – vybraná verze protokolu
– server random
– vybraná suite a mód komprese
– seznam rozšíření

← [Certificate] – certifikát serveru

← [ServerKeyExchange] – závisí na zvoleném algoritmu pro KX

← [CertificateRequest] – chceme i auth. klienta

← ServerHelloDone – deklarace, že server je hotov s KX

→ [Certificate] – cert. klienta

→ ClientKeyExchange – klientova část KX (povinná)

→ [CertVerify] – podpis dosavadních zpráv certifikovaným klíčem

→ ChangeCipherSpec – klient deklaruje přechod na novou šifru
(pozor, tohle je samostatný sub-protokol)

→ Finished – handshake complete
– podpis: PRF(master secret, "client finished" | hash(handshake messages))
→ spočítá se z premaster secretu a server/client random

← ChangeCipherSpec

← Finished – teprve tímhle se u RSA auth ověří, že server má soukromý klíč ke svému certu

- **zajímavá rozšíření**

- session resume – ServerHello obsahuje ID, pod kterým server ukládá session

další spojení { – ClientHello požádá o resume s dřívějším ID
– zkrácený handshake → jen 2x hello a 2x finished
– ~~nový master secret~~ nové klíče se odvodí ze starého mast. secretu a nových náhodných dat

- session tickets – podobné, ale celý stav si pamatuje klient (zašifrováno serverovým klíčem)
- server name – pro virtual hosting (viz Hosts v HTTP)
- ALPN (app-level protocol negotiation ... třeba HTTP 1 vs. 2 vs. SPDY)
  - klient nabídne protokoly, server vybere jeden
- Re-negotiation – lze iniciovat opětovné spuštění dohadování (od Hello)
  - třeba po přenesení pár GB dat (chceme nové klíče)
  - nebo jsme v průběhu HTTP zjistili, že chceme klientův certifikát
  - TLS ≤ 1.2 má v re-neg zásadní bug: nepodepíše návaznost na předchozí nego. ⇒ elegantní MITM útok
    - navážu spojení se serverem, pošlu část dat, spustím reneg.
    - pak propojím se skutečným klientem, ten nego dokončí
    - → umím vnutit prefix relace (třeba HTTP GET, k němuž klient doplní cookies nebo svůj cert)
  - secure reneg. extension → doplňuje návaznost do podpisů
- Close Alert – podepsané ukončení spojení
  - klienti často ignorují → cookie cutting attack

Útoky na SSL/TLS

- BEAST (Browser Exploit Against SSL/TLS)
  - TLS ≤ 1.0 používá CBC s jednou IV – celé spojení je 1 posloupnost bloků
  - tím pádem víme, jaká IV se použije pro další zprávu
    - → 1. blok další zprávy je efektivně ECB
  - CPA: umíme zjistit, zda se CP zašifruje stejně jako některý z předchozích bloků
  - navíc můžeme CP paddingem zařídit, aby předch. blok obsahoval hodně známých dat + trochu tajných (třeba 1. znak cookie)
- Compression side-channels
  - → CRIME (Compression Ratio Info-leak Made Easy)
  - → chceme vypnout kompresi

  } útočíme na cookies, XSRF tokens atd.
- Lucky 13 – CBC padding oracle (MAC-then-encrypt)
- POODLE (Padding Oracle On Downgraded Legacy Encryption)
  - mnoho implementací lze donutit k downgrade na SSL3

- SSL3 nekontroluje obsah paddingu
- zařídíme, aby posl. blok obsahoval jen padding
  - → poslední bajt bloku je B−1, předchozí libovolné
- zašifrovaný blok vyměníme za jiný (o němž chceme něco zjistit)
  - → s Pr = 1/256 vyjde po dešifrování a XORu s předch. blokem B−1 na konci; jinak nesedí MAC a spojení se rozpadne
  - → tehdy zjistíme posl. bajt vybraného bloku (XOR...)
  - → pak posuneme plain-text (CPA) a iterujeme...

- DROWN (Decrypting RSA using Obsolete and Weakened eNcryption)
  - ve starších verzích funguje Bleichenbacherův útok
  - pokud server umí více verzí, použijeme starou jako orákulum na lámání nové
    - se stejným certem
- ROBOT (Return Of Bleichenbacher Oracle Threat)
  - i TLS 1.2 pořád používá PKCS #1 v1.5, ale s work-aroundy proti Bleich. útokům
  - → ještě stále se najdou varianty útoku, které fungují
- Shrnutí:
  - nechceme používat blok. šifry s CBC → buď proudové nebo GCM
  - chceme zakázat obsoletní verze a suity
  - jsou potřeba rozšíření protokolu

Internet PKI

- PKI založená na standardu ITU X.509 ← obskurní, překomplikovaný, ASN.1, původně určený pro jiný svět (ISO/OSI, X.500)
- cert. autority
  - typicky komerční – co je jejich zájmem?
  - pár neziskových – hlavně Let's Encrypt
  - je jich mnoho (Firefox momentálně uznává 181 kořenových certifikátů)
    - → jak pravděpodobné je, že všechny CA jsou
      a) poctivé,
      b) dostatečně důsledné?

- mezilehlé (intermediate) certifikáty
  - podepsané root klíčem, dál podepisují → cert chains
  - některé používá sama CA, jiné deleguje (?)
  - mohou mít omezení na domény / použití

  ! složité, ve validaci časté chyby

- jiný distribuovaný model: 1 CA, více registračních autorit

- typy certifikátů: DV = domain-validated (držitel měl pod kontrolou doménu)
  OV = organization-validated (legal entity)
  EV = extended validation
- certifikát obsahuje:
  - subject (X.500 DN!)
  - subject alt. names – domény, e-mail. adresy &c.
  - heš ~~k~~ veřejného klíče
  - identifikaci vydavatele & podpis
    ↳ vlastně nadřazený cert (root je self-signed)
  - použití: server / klient / code signing / CA / ...
  - časový interval validity
  - množina rozšíření
- <u>revokace certifikátů</u>:
  - CRL (Cert Revocation List) – velké seznamy, pomalý download
    → aktualizují se zřídka
  - OCSP (Online Cert Status Protocol) – cert odkazuje na OCSP responder
    - problémy se soukromím (nešifrováno, jen podpisy odpovědí)
    - pomalé a nespolehlivé → klienti dělají soft-fail ↯ (triviální MiTM útok)

    → TLS extension: OCSP reply stapling
    → cert extension: must-staple (zatím ji klienti moc neumí...)
  - Google: crlset
  - Mozilla: OneCRL

  } proprietární seznam, klientem průběžně stahován
  automaticky se do něj propagují revokace klíčů CA a "high-profile" sites

  ... a Chrome dnes ani klasický OCSP nepoužívá ☹

– 2024: nejlepším řešením pro běžné certifikáty se zdá být krátká platnost...

- CA/Browser fórum: stanovuje požadavky na CA
  - → pravidla, povinné audity atd.
  - → za vážná porušení prohlížeče CA blacklistují (už se párkrát stalo)
- Opatření proti podvodně vydaným certům
  - Perspectives – pozorování certů z více míst v síti
  - public key pinning
    - Google v Chrome pinuje klíče svých domén (nečekaně úspěšné)
    - HPKP (HTTP Public-key Pinning): pin v hlavičce odpovědi [dosti křehké ...]
    - DANE (DNSSEC Authentication of Named Entities) [elegantní, ale odmítané autory prohlížečů kvůli latenci]
  - CAA v DNS – záznam omezující, která CA smí vydávat certy
  - Certificate Transparency (CT)
    - veřejné logy vydaných certů – Merkleovy stromy, lze snadno kontrolovat konsistenci
      z různých provozovatelů
    - vyhledávač crt.sh
    - CA/B forum nařizuje pro EV certy a intermediates, občas také za trest ☺
      – součástí certifikátu nebo OCSP může být potvrzení o zařazení do CT logu
    - HTTP: "Expect-CT" v odpovědi
      2024: obsolete
- problémy s mícháním obsahu na HTTPS a HTTP → warningy
  ... ale co míchání DV a EV certifikace?
  2023: dnes už Chrome vyžaduje
- Uživatelé často spoléhají na HTTP redirect na HTTPS
  - to by také mohlo řešit DANE, ale...
  - HTTP Strict Transport Security (STS)
    - v hlavičce odpovědi: "zapamatuj si, že tady máš používat jen HTTPS"
    - ale neřeší to first use
  - plugin HTTPS Everywhere → nespolehlivé, občas je na HTTP a HTTPS jiný obsah
    2023: dnes už prohlížeče defaultují na HTTPS