

O barevných kloboucích

... společenská hra pro tyrana a n vězňů

(verze 1.2 z 2021-05-06)

0. Na zahřátí

Byl jednou jeden krutý vládce, který měl plné vězení. Jeho krutost spočívala v tom, že pro své vězně, aby v celách nezaháleli, vymýšlel nejrůznější důmyslné úkoly. Často jim rozdával klobouky několika barev a pak nechal každého hádat, jaký klobouk má na své hlavě. Kdo vyhrál, toho obvykle propustil. Kdo prohrál ... toho spíš ne.

Úkol 0.1: Alice a Bob (uvěznění za podezřelé používání kryptografie) dostanou na hlavu červený nebo černý klobouk. Každý vidí klobouk toho druhého, ale ne svůj. Oba současně řeknou barvu a pokud se aspoň jeden strefí do barvy svého klobouku, oba vyhraji. Vymyslete pro ně strategii. Tím se myslí návod, jak z toho, co vidí, vymyslet odpověď, aby vždy vyhráli.

1. Vězni na schodišti

Úkol 1.1: N vězňů očíslovaných od 1 do N stojí v řadě tak, že i -tý vězeň vidí na $(i + 1)$ -tého až N -tého (můžete si třeba představit, že vězni stojí na schodišti a dívají se směrem dolů). Každý vězeň dostane červený nebo černý klobouk, aniž by věděl, jaký. Zato vidí barvy klobouků všech následujících vězňů. Pak se žalářník postupně ptá vězňů od prvního k N -tému a každý řekne barvu. Vymyslete strategii, při níž co nejvíce vězňů řekne barvu svého klobouku.

Úkol 1.2: *Zrušen, nefungoval.*

Úkol 1.3: Dokažte o řešení předchozích dvou úloh, že je nejlepší možné.

Úkol 1.4: Vyřešte úkol 1.1 pro $K > 2$ barev klobouků.

2. Katedra filosofie

Tyran tentokrát zabásl celou katedru filosofie. Jelikož jeden filosof* je moudřejší než druhý, vládce tráví už třetí bezesnou noc vymýšlením dostatečně čtverácké úlohy. Nakonec přišel s touto.

V místnosti je N mudrců, kteří se mohou domluvit na strategii. Pak přijde žalářník, zhasne a každému mudrci dá *náhodně vybraný* červený nebo černý klobouk (každý

* Tyran si možná myslí, že *filozof*, ale to by místo moudrosti (sofia) milovali temnotu (zofia) ...

mudrc tedy nezávisle na ostatních dostane s pravděpodobností $1/2$ červený a s pravděpodobností $1/2$ černý). Pak se rozsvítí a každý mudrc spatří barvy všech klobouků kromě svého.

Nakonec každý mudrc odevzdá obálku, do které napsal, co si myslí o barvě svého klobouku. Může odpovědět buď *červená*, *černá*, nebo *nevím*. Ostatní mudrci se jeho odpověď nedozvědí.

Mudrci vyhrají (a jsou propuštěni, protože další úlohou by si tyran uřízl ještě větší ostudu), pokud všichni odpovědí správně (tzn. barvou svého klobouku nebo *nevím*) a aspoň jeden neodpoví *nevím*.

Chceme vymyslet takovou strategii, aby mudrci vyhráli s co největší pravděpodobností.

Úkol 2.1: Vymyslete strategii, která pro každé N vyhraje s pravděpodobností $1/2$.

Úkol 2.2: Vymyslete strategii pro 3 mudrce, která vyhraje s pravděpodobností ostře větší než $1/2$.

Úkol 2.3: Vymyslete ještě lepší strategii pro nějaký počet mudrců. (Prozradíme vám, že pro dost velký počet mudrců se dá dosáhnout pravděpodobnosti výhry libovolně blízké k 1.)

3. Nášup aneb co se šušká ve vězeňské kantýně

Úkol 3.1: Vyřešte úkol 0.1 pro 100 hráčů a 100 barev. Každý vidí barvy všech ostatních, opět má aspoň jeden odpovědět svou barvou.

Úkol 3.2: Úlohu o mudrcích upravíme tak, že se hraje ve více kolech. V každém kole všichni odpovědí. Pokud všichni odpovéděli správně a aspoň jeden neřekl *nevím*, vyhráli a hra končí. Pokud někdo odpovéděl špatně, prohráli a hra také končí. Pokud všichni odpovéděli *nevím*, hraje se další kolo. Navrhněte strategii s co největší pravděpodobností výhry. (Po příliš mnoha kolech to žalářníka přestane bavit a podvrhne chybnou odpověď, aby už mohl jít domů.)

Úkol 3.3: Úlohu hraje nekonečně mnoho mudrců očíslovaných přirozenými čísly. Každý mudrc dostane červený nebo černý klobouk (ne nutně náhodně) a vidí všechny klobouky kromě toho svého. Všichni odpovědí najednou *červená* nebo *černá*. Mudrci vyhrají, pokud pouze konečně mnoho z nich odpovédělo špatně.