Domácí úkoly z Diskrétní matematiky 2018-01-08

Rovinné grafy

Úplné bipartitní grafy – `kmn` *(8 bodů)*

Pro která m, n je graf $K_{m,n}$ rovinný?

4D krychle – `4cube` *(10 bodů)*

Dokažte, že graf Q_4 (4-rozměrná krychle) není rovinný. (Q_d je graf, jehož vrcholy jsou všechny posloupnosti nul a jedniček délky d a hrana spojuje posloupnosti lišící se na právě jedné pozici.)

Kreslení na anuloid – `ak6` *(10 bodů)*

Nakreslete graf K_6 na anuloid. 5 bodů navíc, pokud nakreslíte dokonce K_7.

Skoro 6-regulární rovinné grafy – `sko6r` *(10 bodů)*

Víme, že 6-regulární rovinný graf nemůže existovat. Budeme tedy místo toho hledat grafy, které jsou *skoro 6-regulární.* Konkrétněji: Najděte posloupnost rovinných grafů $G_1, G_2, \ldots$, pro kterou bude platit:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{v \in V(G_n) \mid \deg(v) < 6\}|}{|V(G_n)|} = 0.$$

Doplňky rovinných grafů – `doro` *(10 bodů)*

Na cvičení jsme dokázali, že pro $n \geq 11$ nemůže existovat rovinný graf na n vrcholech, jehož doplněk by byl také rovinný. Na druhou stranu pro $n = 5$ takový graf určitě existuje $C_5 \approx \overline{C_5}$. Zkuste něco zjistit o grafech mezi tím (pro $n = 6, \ldots, 10$). Čím blíže se k hranici mezi „dobrými“ a „špatnými“ n přiblížíte, tím více bodů.

Maximální počet stěn – `psten` *(8 bodů)*

Víme, že v rovinných grafech platí $e \leq 3v - 6$. Dokažte obdobný horní odhad pro f. (Zde v je počet vrcholů, e počet hran a f počet stěn.)