

*Indukce***Součet mocnin dvojky**

Dokažte indukci:

$$\sum_{i=0}^n 2^i = 2^{n+1} - 1.$$

Součet vážených mocnin dvojky

Dokažte indukci:

$$\sum_{i=1}^n i \cdot 2^i = (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2.$$

Součin zlomků

Dokažte indukci:

$$\prod_{i=2}^n \frac{i-1}{i} = \frac{1}{n}.$$

DělitelnostDokažte, že $4 \mid (6n^2 + 2n)$ pro každé $n \geq 0$.**Dělitelnost podruhé**Dokažte, že $8 \mid (n^2 - 1)$ pro každé liché $n > 0$.**Součin prvočísel**

Dokažte, že každé celé kladné číslo lze vyjádřit jako součin prvočísel.

Vztahy pro Fibonacciho číslaDefinujeme *Fibonacciho čísla* následovně: $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$. Dokažte, že platí:

- $\sum_{i=1}^n F_i = F_{n+2} - 1$
- $F_n \geq 2^{(n-2)/2}$ pro $n \geq 2$
- $(F_n)^2 = F_{n-1}F_{n+1} + (-1)^{n+1}$
- $\sum_{i=1}^n F_i^2 = F_n F_{n+1}$

*Něco navíc:***Součet čtverců**

Dokažte indukci:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n.$$

Pluska a minuskaOznačme S_n množinu celých čísel, která lze zapsat ve tvaru $\pm 1 \pm 2 \pm 3 \dots \pm n$ (kde každé \pm nahradíme znaménkem $+$ nebo $-$ nezávisle na ostatních). Co tato množina obsahuje?**Egyptské zlomky**Obывatelé staroegyptské říše zapisovali zlomky jako součty tzv. kmenových zlomků ve tvaru $1/n$, například $3/5 = 1/2 + 1/10$. Dokažte, že každý zlomek z intervalu $(0, 1)$ lze takto vyjádřit. Náповěda: rozklad zlomku m/n bude začínat zlomkem $1/\lceil n/m \rceil$.