

## Příklady z Diskrétní matematiky 2010-11-03

### *Kombinatorické počítání*

#### **Šotek**

Chystá se další vydání nejmenovaných novin. Tiskařský šotek může v každém z  $n$  článků buď napáchat překlep, nebo vyměnit popisku u obrázku. Kolika způsoby může šotek provést  $k$  chyb tak, aby v každém článku spáchal nejvýše jednu? Co když může být  $k$  libovolné?

#### **Přesmyčky**

Kolik přesmyček (i nesmyslných) má slovo Mississippi? Ukazovali jsme si, že to souvisí s multinomickými koeficienty a že všech řetězců z  $n$  písmenek, kde  $i$ -té písmenko se má vyskytnout  $c_i$ -krát, je právě

$$\binom{c_1 + \dots + c_k}{c_1, \dots, c_k} = \frac{(c_1 + \dots + c_k)!}{c_1! \cdot \dots \cdot c_k!}.$$

#### **Vytýkání z kombinačního čísla**

Dokažte, že platí

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \cdot \binom{n-1}{k-1} \quad \text{pro } n \geq k \geq 1.$$

Kombinatorickou úvahou se snáze dokazuje rovnost

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}.$$

(Interpretace: Jak z  $n$  vesničanů může povstat banda  $k$  zbojníků s náčelníkem?)

#### **Loupežnická banda**

Jiný příklad s podobnou interpretací:

$$\sum_{k=0}^n k \cdot \binom{n}{k}.$$

#### **Hesla**

Kolik hesel můžeme vytvořit z velkých a malých písmen anglické abecedy, pokud heslo smí mít od 5 do 8 znaků a musí obsahovat alespoň jedno velké a alespoň jedno malé písmeno?

#### **Vnořené podmnožiny**

Kolik existuje dvojic  $(A, B)$  množin, pro které platí  $A \subseteq B \subseteq \{1, \dots, n\}$ ?