8. Datové struktury

Co si můžeme představit pod pojmem datová struktura? V našich programech často chceme některé věci abstrahovat (použitím funkcí, objektů...). Proč tedy nezkusit abstrahovat i operace s daty? Napřed si určíme, co s našimi daty budeme provádět a pak vymyslíme jejich co nejrychlejší reprezentaci.

Můžeme třeba chtít udržovat konečnou množinu X prvků z nějakého universa $X \subseteq U$. Kde universum mohou být například přirozená čísla, tedy universum může být nekonečné narozdíl od X.

Na našich datech budeme chtít provádět následující operace:

- *Insert* – vložit novou položku
- *Delete* – smazat položku
- *Find* – najít položku

Jak měřit časovou složitost? Určitě nechceme měřit vůči délce vstupu, protože ho nemusíme mít celý najednou ve struktuře. Časovou složitost jednotlivých operací počítejme vzhledem k počtu prvků obsažených v datové struktuře.

Také můžeme chtít udržovat slovník, tedy množinu dvojic (k, v) kde $k \in U$ se nazývá klíč a v hodnota. Dále předpokládejme, že U je lineárně uspořádaná a s prvky pracujeme v konstantním čase.

Dále budeme zkoumat jen slovník, protože množina je jen jeho speciálním případem.

Po slovníku budeme chtít:

- *Insert(k, v)* – vložit novou hodnotu spolu s klíčem
- *Delete(k)* – smazat položku podle klíče
- *Find(k)* – najít položku podle klíče

V následující tabulce jsou některé možné způsoby reprezentace naší datové struktury.

	Insert	Delete	Find
pole	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
setříděné pole	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(\log n)$
spojový seznam	$\Theta(1)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
setříděný seznam	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$	$\Theta(n)$
vyhledávací stromy	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$

Pozorování: Proces binárního vyhledávání v setříděném poli se dá reprezentovat binárním vyhledávacím stromem.

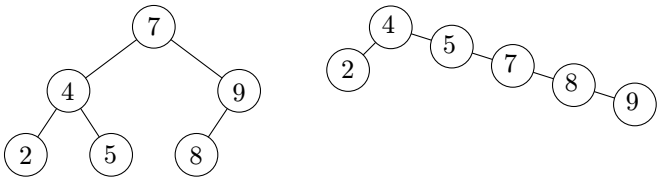
Definice: *Binární strom:* Strom je binární, pokud je zakořeněný a každý vrchol má nejvýše dva syny, u nichž rozlišujeme, který je levý a který pravý.

Definice: Pro vrchol v značíme:

- $l(v)$ a $p(v)$ – levý a pravý syn vrcholu v
- $L(v)$ a $P(v)$ – levý a pravý podstrom vrcholu v
- $S(v)$ – příslušný podstrom s kořenem v
- $h(v)$ – hloubka stromu $S(v)$ – délka nejdelší cesty z kořene do listu

Definice: *Binární vyhledávací strom* (BVS): Binární strom je vyhledávací, pokud v každém vrcholu je uložena dvojice (klíč, hodnota) [ztotožníme vrchol s klíčem] a pro všechny vrcholy platí: $(\forall u \in L(v) : u < v)$ & $(\forall u \in P(v) : u > v)$.

Příklady binárních vyhledávacích stromů:



Jak budou tedy vypadat operace *Find*, *Insert* a *Delete* na binárním vyhledávacím stromu?

Find(v, x)**:**

1. Pokud $v = \emptyset \Rightarrow$ vrátíme $\emptyset$.
2. Pokud $v = x \Rightarrow$ vrátíme v.
3. Pokud $v < x \Rightarrow$ vrátíme $Find(p(v), x)$.
4. Pokud $v > x \Rightarrow$ vrátíme $Find(l(v), x)$.

Insert(v, x)**:**

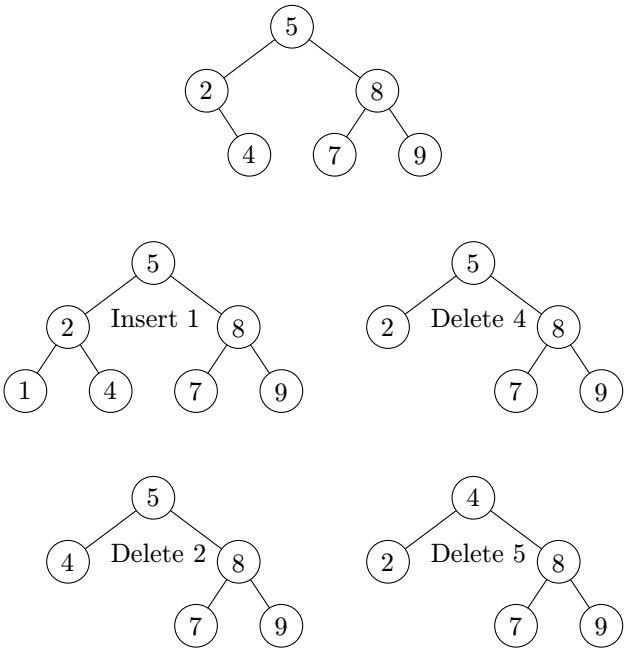
1. Jako *Find* a na konci přidáme list.

Delete(v)**:**

1. Pokud v je list $\Rightarrow$ jednoduše list utrhneme.
2. Pokud v má jednoho syna $\Rightarrow$ vrchol „vyřízneme“.
3. Jinak má v oba syny $\Rightarrow$ do vrcholu vložíme minimum z $P(v)$, minimum už umíme smazat protože je to buď list nebo má jen pravého syna.

Poznámka: Pokud má vrchol v při operaci *Delete* oba syny, je vložení minima z $P(v)$ ekvivalentní s vložením maxima z $L(v)$.

Příklady operací *Insert* a *Delete* na BVS:



Časová složitost všech tří operací je $\Theta(\textit{hloubka stromu})$, což může být $\Theta(n)$, když budeme mít smůlu a strom bude (téměř) lineární spojový seznam. Takovéto degenerované stromy vzniknou snadno, například přidáváním setříděné posloupnosti. Naopak když bude strom pěkně vyváženě vystavěný dostaneme složitost $\Theta(\log n)$. Vidíme tedy, že složitost operací stojí a padá s hloubkou stromu. Proto by se nám líbilo, aby měl náš strom vždy hloubku $\Theta(\log n)$. Podívejme se tedy, jak se dá navrhnout binární vyhledávací strom, aby tuto podmínku splňoval ...

Vyvážené binární vyhledávací stromy

Definice: *Dokonalá vyváženost:* Strom je dokonale vyvážený, pokud pro všechny jeho vrcholy platí: $||L(v)| - |P(v)|| \leq 1$.

Takto definovaný binární strom bude mít určitě logaritmickou hloubku. Jak takový strom ale konstruovat? To se nám podaří buď staticky, nebo na něm budou operace dražší než $\Theta(\log n)$.

Statická konstrukce dokonale vyváženého BVS: Vybereme prostřední prvek ze setříděného pole (tedy medián posloupnosti) a dáme ho do kořene stromu. Jeho syny pak vystavíme rekurzivně z levé a pravé půlky pole. Celá konstrukce tedy trvá $\mathcal{O}(n)$.

Lemma: buď *Insert* nebo *Delete* v dokonale vyváženém BVS trvají $\Omega(n)$ (ve skutečnosti oba, ale důkaz je mnohem obtížnější).

Důkaz: Nechť $n = 2^k - 1$. Pak má dokonale vyvážený BVS určený tvar a je jednoznačné, co je v kořeni. Nechť nejmenší číslo ve stromě je x a největší je $x + n - 1$.

Proveďme posloupnost operací

$$Insert(x+n), Delete(x), Insert(x+n+1), Delete(x+1)\ldots$$

vždy se aspoň polovina listů posune o patro výš. Víme že listů v našem stromě je $(n+1)/2$. Tedy aspoň jedna z operací *Insert* nebo *Delete* trvá $\Omega(n)$.

Vidíme tedy, že to náš problém příliš neřeší. Potřebovali bychom, aby se strom dal také efektivně udržovat. Zkusíme proto slabší podmínku:

Definice: *Hloubková vyváženost:* Strom je hloubkově vyvážený, pokud pro všechny jeho vrcholy platí: $|h(L(v)) - h(P(v))| \leq 1$.

Stromům s hloubkovým vyvážením se říká *AVL stromy* (objeviteli je ruští matematikové G. M. Aděľson-Veľskij a E. M. Landis, podle nich jsou také pojmenovány) a platí o nich následující lemma:

Lemma: AVL strom na n vrcholech má hloubku $\Theta(\log n)$.

Důkaz: Uvažme posloupnost A_k = minimální počet vrcholů AVL stromů hloubky k. Stačí ukázat, že A_k roste exponenciálně.

Jak bude vypadat minimální AVL strom o k hladinách? S počtem hladin určitě poroste počet vrcholů, proto pro každý vrchol budeme chtít, aby se hloubky jeho synů lišily. Tedy kořen bude mít syna hloubky $k-1$ a syna hloubky $k-2$, takové že jeho synové jsou minimální AVL stromy o daném počtu hladin.

Podívejme se na minimální AVL stromy:

$$\begin{aligned} A_0 &= 1 \\ A_1 &= 2 \\ A_2 &= 4 \\ A_3 &= 7 \\ &\vdots \\ A_k &= 1 + A_{k-1} + A_{k-2}. \end{aligned}$$

Rekurentní vzorec jsme dostali rekurzivním stavěním stromu hloubky k: nový kořen a 2 podstromy o hloubkách $k-1$ a $k-2$.

Vidíme tedy, že $A_n = F_{n+2} - 1$. (Můžeme dokázat např. indukcí.) Teď nám již stačí dokázat, že posloupnost A_k roste aspoň exponenciálně.

Indukcí dokážeme, že $A_k \geq 2^{\frac{k}{2}}$. První indukční krok jsme si už ukázali, teď pro $k \geq 2$ platí: $A_k = 1 + A_{k-1} + A_{k-2} > 2^{\frac{k-1}{2}} + 2^{\frac{k-2}{2}} = 2^{\frac{k}{2}} \cdot (2^{-\frac{1}{2}} + 2^{-1}) \cong 2^{\frac{k}{2}} \cdot 1.21 > 2^{\frac{k}{2}}$.

Tímto jsme dokázali, že na každé hladině je minimálně exponenciálně vrcholů, což nám zaručuje hloubku $\mathcal{O}(\log n)$. Druhou nerovnost nahlédneme zkoumáním B_k maximálního počtu vrcholů AVL stromu hloubky k. ♡