5. Nejkratší cesty

Na této přednášce budeme studovat problém hledání nejkratších cest v orientovaných grafech ohodnocených reálnými čísly.

Situace: Máme orientovaný graf G a funkci $\ell : E(G) \to \mathbb{R}$ přiřazující hranám jejich ohodnocení (délky). Pro vrcholy $u, v \in V(G)$ budeme chtít spočítat jejich vzdálenost $d(u, v)$, což bude délka nejkratší cesty z u do v nebo ∞, pokud žádná cesta neexistuje.

Chceme, aby se vzdálenosti chovaly „rozumně“, tedy co nejvíce jako metrika. Orientovanost grafů nám kazí symetričnost – nemusí nutně platit $d(x, y) = d(y, x)$. Budeme aspoň chtít, aby platily následující vlastnosti:

- $d(u, u) = 0$,
- $d(u, v) \leq d(u, w) + d(w, v)$ (trojúhelníková nerovnost).

To nemusí obecně platit (kazí nám to záporné cykly), proto budeme studovat pouze grafy, v nichž záporné cykly neexistují. Pak už budou obě vlastnosti splněny, jak plyne například z následujícího lemmatu:

Lemma: V grafu bez záporných cyklů existuje ke každému nejkratšímu sledu z u do v stejně dlouhá uv-cesta.

Důkaz: Máme-li nejkratší uv-sled, který není cestou, opakuje se v něm nějaký vrchol $w \in V(G)$ tedy uv-sled je $(u \ldots w \ldots w \ldots v)$. Délka cyklu $c = (w \ldots w)$ je $\ell(c) \geq 0$ tedy platí $\ell(u \ldots w \ldots v) \leq \ell(\text{původní sled})$. Tento postup můžeme opakovat a po konečném počtu kroků dostaneme cestu. Z toho plyne trojúhelníková nerovnost. ♡

Jednoduché případy

- Pokud ℓ je konstantní funkce, použijeme BFS. Časová složitost bude $\Theta(m + n)$.
- Délky hran jsou malá přirozená čísla – $\ell(x, y) \in \{1, \ldots, L\}$: Podrozdělíme hrany a použijeme BFS. Časová složitost $\Theta(Lm + n)$.
- V DAG (orientovaném acyklickém grafu) najdeme nejkratší cestu indukcí přes topologické uspořádání v čase $\Theta(m + n)$.

Obecný algoritmus

Definice: $D_k(v) :=$ minimální délka ze všech sledů z v_0 do v o právě k hranách. $D_0(v) = 0$ pokud $v = v_0$, jinak $D_0(v) = \infty$.

$d(v_0, v) = \min D_k(v)$ kde $1 \leq k \leq n - 1$.

Jak spočítat D_k když už známe $D_0 \ldots D_{k-1}$? Zřejmně

$$D_k = \min\{D_{k-1}(u) + \ell(u, v)\}$$

pro taková u že $(u, v) \in E(G)$. Z tohoto můžeme udělat jednoduchý algoritmus: postupně pro všechna $k = 0 \ldots n - 1$ zjistíme všechna $D_k(z)$ pro všechny vrcholy $z \in V(G)$. Délka nejkratší cesty z v_0 do v je $\min D_k(v)$ kde $1 \leq k \leq n - 1$.

Naivní implementace poběží $n^2(\sum_v \deg^+(v)) + n$ (musíme přičíst na konec n za izolované vrcholy), upravíme $\sum_v \deg^+(v) = m$. Bohužel spotřebujeme $\Theta(n^2)$ paměti.

Nevýhodou této implementace je přistupování k hranám pozpátku. Pojďme zkusit nepatrně odlišný přístup.

Bellmanův-Fordův algoritmus

1. $D(*) \leftarrow \infty, D(v_0) \leftarrow 0$
2. Pro $k = 1, \ldots, n-1$:
3. Pro $\forall v \in V(G)$:
4. Pro $\forall w$ takové že $(v, w) \in E(G)$:
5. $D(w) \leftarrow \min(D(w), D(v) + \ell(v, w))$

Pokud by algoritmus i v n-tém kroku něco změnil, graf obsahuje záporný cyklus.
Věta: Bellmanův – Fordův algoritmus najde v čase $\Theta(nm)$ vzdálenosti $d(v_0, v)$ z v_0 do všech $v \in V(G)$.
Důkaz: Invarianty:

- Konečné $D(v)$ vždy odpovídá délce nějakého sledu z $v_0 \to v$.

Pro vrchol v_0 určitě existuje sled nulové délky z v_0 do v_0.

Jak se z původního nekonečného $D(v)$ mohlo stát konečné? Našli jsme takovou hranu, která vedla z vrcholu w s konečným $D(w)$ do vrcholu v. Tedy do v existuje sled.

Pokud snížím $D(v)$, znamená to, že jsem do vrcholu v našel kratší sled.

- Na konci k-tého průchodu vnějším cyklem platí $D(w) \leq$ min délka sledu z v_0 do v o nejvýše k hranách. Z čehož plyne že na konci je $D(w) \leq d(v_0, v)$.

Nechť nejkratší sled $v_0 \to w$ o nejvýše k hranách končí hranou (v, w). Zastavme algoritmus v okamžiku, kdy v k-tém průchodu zpracovává hranu (v, w) tehdy $D(w) \leq D(v) + \ell(v, w)$ a $D(v)$ je dle indukčního předpokladu menší nebo rovno minimální délce sledu z v_0 do v o nejvýše k hránách. ♡

V Bellman – Fordově algoritmu jsme v podstatě zlepšovali odhady na nejkratší cestu. Pojďme vymyslet algoritmus založený na podobné myšlence.
„Průzkumnický algoritmus“ Pro každý vrchol budeme udržovat jeho ohodnocení (dočasnou vzdálenost) $D(v)$ a stav vrcholu $S(v)$. Stav může být buď N neviděn – vrchol jsme ještě nepotkali, O otevřen – od posledního prozkoumání se $D(v)$ změnilo nebo Z zavřen – není potřeba zkoumat znovu, nic by se nezměnilo. Abychom mohli nejkratší cestu na konci běhu také zrekonstruovat, budeme si ještě udržovat $P(v)$ předchůdce vrcholu v.

1. $D(*) \leftarrow \infty, D(v_0) = 0, S(*) \leftarrow N, S(v_0) \leftarrow O, P(*) \leftarrow ?$
2. Dokud $\exists u$: $S(u) = O$ opakuj:
3. $S(u) \leftarrow Z$
4. Pro $\forall v : (u, v) \in E(G)$:
5. Je-li $D(u) + \ell(u, v) < D(v)$
6. $D(v) \leftarrow D(u) + \ell(u, v)$
7. $S(v) \leftarrow O$

Invariant: $D(v)$ neroste a odpovídá délce nějakého sledu z v_0 do v.

$D(v)$ volíme jako minimum z $D(v)$ a $D(u)+\ell(u, v)$, proto nikdy nemůže vzrůst.

Důkaz toho, že $D(v)$ odpovídá délce nějakého sledu z v_0 do v je stejný jako u Bellman – Fordova algoritmu.

Lemma: Algoritmus se zastaví při jakémkoliv pořadí zavíraných vrcholů. Čas při nevhodném zavírání může být až exponenciální.

Toto lemma bude zanecháno bez důkazu, neboť ho nebudeme potřebovat pro důkaz správnosti algoritmů, které od „průzkumnického algoritmu“ odvodíme.

Lemma: Pokud se algoritmus zastaví, pak dosažitelné vrcholy jsou zavřené a kdykoliv $S(v) = Z$, platí $D(v) = d(v_0, v)$.

Důkaz: Nechť cesta z v_0 do v je co do počtu hran nejmenší protipříklad, pak musí existovat vrchol u, pro který neplatí $S(u) = Z$. Což je spor, protože takový vrchol musel náš algoritmus projít.

Vezměme minimání protipříklad co do počtu hran. Nechť v je nejbližší vrchol od u takový, že $D(v) \neq d(v_0, v)$, tudíž musí být větší, než by měl být, protože odpovídá délce nějakého sledu. Označme u předchůdce vrcholu v na nejkratší cestě. Víme, že $D(u)$ je správně. Algoritmus zkoumal u nastavil finální $D(u)$, tedy přitom zpracoval hranu (u, v) a $D(v) \leq D(u) + \ell(u, v)$, což je opravdová vzdálenost. Dostali jsme spor s tím, že $D(x)$ neroste. ♡