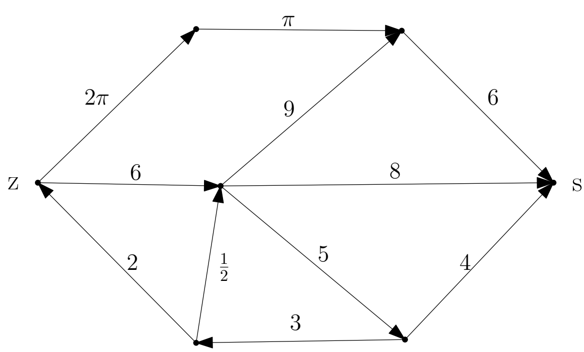
2. Toky v sítích *(přednášel T. Valla, zapsali J. Machálek a K. Vandas)*

Motivační úlohy:

- Mějme orientovaný graf se speciálními vrcholy Želivka a Kanál představující pražské vodovody. V tomto grafu budou vrcholy vodovodními stanicemi a hrany trubkami mezi nimi. Kolik vody proteče ze Želivky do Kanálu?
- Mějme orientovaný graf představující železniční síť; graf má význačné vrcholy Moskva a Fronta, každá hrana grafu má kapacitu, kterou může uvézt. Kolik vojáků je schopna síť převézt z Moskvy a spotřebovat na Frontě?

Definice: *Síť* je uspořádaná čtveřice (G, z, s, c), kde G je orientovaný graf, z a s jsou nějaké dva jeho vrcholy (*zdroj* a *stok*) a c je *kapacita hran,* kterou představuje funkce $c : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$.



Příklad sítě. Čísla představují kapacity jednotlivých hran.

Intuice: Toky v sítích představují rozvržení, jakým suroviny sítí potečou.

Definice: *Tok* je funkce $f : E(G) \to \mathbb{R}_0^+$ taková, že platí:

1. Tok po každé hraně je omezen její kapacitou: $0 \leq f(e) \leq c(e)$.
2. Kirchhoffův zákon – „síť těsní“:

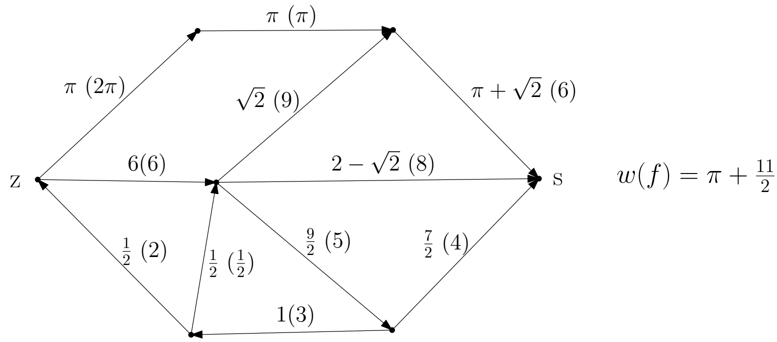
$$\sum_{xu \in E} f(xu) = \sum_{ux \in E} f(ux) \quad \text{pro každé } u \in V(G) \setminus \{z, s\}.$$

Poznámka: Pokud bychom se chtěli v definici toku u bodu 2 vyhnout podmínkám pro z a s, můžeme zdroj a stok vzájemně propojit (pak jde o tzv. cirkulaci).

Poznámka: V angličtině se obvykle zdroj značí „s“ a stok „t“ (jako source a target).

Definice: *Velikost toku f* je:

$$|f| := \sum_{zx \in E} f(zx) - \sum_{xz \in E} f(xz).$$



Příklad toku. Čísla představují toky po hranách, v závorkách jsou kapacity.

Budeme tedy chtít najít v zadané síti tok, jehož velikost je maximální. Musí vždycky existovat?

Věta: Pro každou síť existuje maximální tok.

Idea důkazu: Dokáže se pomocí metod matematické analýzy s tím, že množina toků je kompaktní a funkce velikosti toku je spojitá (dokonce lineární).

Dobrá, maximální tok vždy existuje. Ale když nám ho někdo ukáže, umíme poznat, že je skutečně maximální? K tomu se budou hodit řezy:

Intuice: Řez v grafu je množina hran oddělující zdroj a stok.

Definice: *Řez* R v síti (G, z, s, c) je množina hran R taková, že neexistuje orientovaná cesta ze z do s v grafu $(V(G), E(G) \setminus R)$.

Definice: *Kapacita řezu* $c(R) = \sum_{uv \in R} c(uv)$.

Někdy je lepší se na řezy dívat takto:

Definice: Pro rozklad množiny vrcholů na dvě disjunktní množiny A, B, kde $z \in A$ a $s \in B$ zavedeme *separátor* $S(A, B)$, což bude množina hran vedoucích z A do B. Pokud je g funkce definovaná na hranách (třeba tok nebo kapacita), definujeme $g(A, B) := \sum_{uv \in E, u \in A, v \in B} g(uv)$.

Pozorování: Každý separátor je řezem (libovolná orientovaná cesta ze z do s musí někdy opustit množinu A, a to jde pouze po hraně patřící do separátoru). Opačně to sice platit nemusí, ale platí, že ke každému řezu existuje separátor takový, že součet kapacit jeho hran je nejvýše kapacita daného řezu. Stačí si zvolit množinu A jako vrcholy dosažitelné ze zdroje po hranách neležících v řezu a do B dát všechny ostatní vrcholy. Separátor $S(A, B)$ pak bude tvořen výhradně hranami řezu (ne nutně všemi) a sám bude řezem.

Definice: Pro libovolnou množinu vrcholů A zavedeme její *doplněk* $\overline{A} := V(G) \setminus A$.

Nyní si všimneme, že velikost toku můžeme měřit přes libovolný separátor: je to množství tekutiny, které teče přes separátor z A do B minus to, které se vrací zpátky (zatím jsme velikost měřili u zdroje, vlastně na triviálním separátoru $A = \{z\}$, $B = \overline{A}$).

Lemma: Nechť $A \subseteq V(G), z \in A, s \notin A$ a f je libovolný tok. Potom platí, že:

$$|f| = f(A, \overline{A}) - f(\overline{A}, A).$$

Důkaz: provedeme pomocí Kirchhoffova zákona a definice velikosti toku:

$$\text{Pro každý vrchol } u \neq z, s \text{ platí:} \quad \sum_{ux \in E} f(ux) - \sum_{xu \in E} f(xu) = 0,$$

$$\text{pro zdroj pak:} \quad \sum_{zx \in E} f(zx) - \sum_{xz \in E} f(xz) = |f|.$$

Rovnice sečteme:

$$\sum_{u \in A} \left(\sum_{ux \in E} f(ux) - \sum_{xu \in E} f(xu) \right) = |f|.$$

Všimneme si, že hrany, jejiž oba koncové vrcholy leží v množině A, přispívají k této sumě jednou kladně a jednou záporně, hrany, jejíž ani jeden vrchol neleží v A, nepřispívají vůbec, a konečně hrany vedoucí z A do B, resp. opačně přispějí jen jednou (kladně, resp. záporně). Tedy:

$$f(A, \overline{A}) - f(\overline{A}, A) = \sum_{u \in A, v \notin A} f(uv) - \sum_{u \notin A, v \in A} f(uv) = |f|.$$

♡

Důsledek: Pokud f je tok, R je řez, pak platí: $|f| \leq c(R)$.

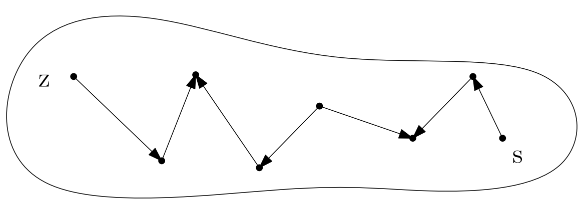
Důkaz: Dokážeme pro separátory (už víme, že ke každému řezu najdeme stejně velký nebo menší separátor):

$$|f| = f(A, \overline{A}) - f(\overline{A}, A) \leq f(A, \overline{A}) \leq c(A, \overline{A}) \leq c(R).$$

♡

Nyní víme, že velikost každého toku je shora omezena velikostí každého řezu. Kdybychom tedy k našemu toku uměli najít stejně velký řez, hned víme, že tok je maximální a řez minimální. Překvapivě platí, že se to povede vždy. K tomu se nám budou hodit zlepšující cesty:

Definice: *Zlepšující cesta* budeme říkat takové cestě mezi danými dvěma vrcholy, která používá buďto hrany sítě (hrany orientované po směru cesty) nebo hrany k nim opačné (v síti jsou tedy proti směru cesty).



Příklad zlepšující cesty.

Definice: *Zlepšující cesta* P ze z do s je *nasycená*, pokud:

$$\exists e \in P : \begin{cases} f(e) = c(e) & \text{je-li } e \text{ orientovaná po směru} \\ f(e) = 0 & \text{je-li } e \text{ orientovaná proti směru} \end{cases}$$

Jinak je zlepšující cesta nenasycená.

Definice: *Tok je nasycený,* pokud je každá zlepšující cesta P ze z do s nasycená.

Věta: Tok f je nasycený $\Leftrightarrow$ f je maximální. Navíc pro každý maximální tok f existuje řez R takový, že $|f| = c(R)$.

Důkaz:

„$\Leftarrow$" dokážeme nepřímo – ukážeme, že pokud nějaký tok není nasycený, tak ho ještě lze zlepšit, pročež nemůže být maximální. Mějme nějaký nenasycený tok f. Existuje tedy nenasycená zlepšující cesta P. Podél této cesty budeme tok vylepšovat. Zvolíme:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &:= \min_{e \in P \text{ po směru}} \{c(e) - f(e)\}, \\ \varepsilon_2 &:= \min_{e \in P \text{ proti směru}} \{f(e)\}, \\ \varepsilon &:= \min \{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}. \end{aligned}$$

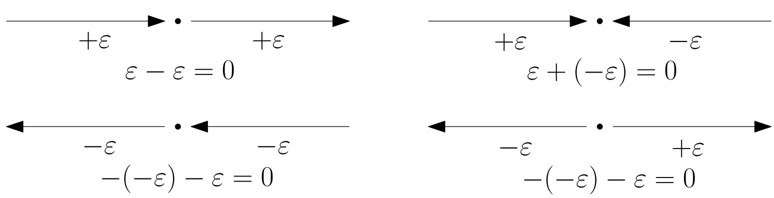
Jelikož cesta byla nenasycená, musí být $\varepsilon > 0$. Nyní z toku f vytvoříme tok f' takto:

$$f'(e) := \begin{cases} f(e) + \varepsilon & \text{je-li } e \text{ po směru cesty,} \\ f(e) - \varepsilon & \text{je-li } e \text{ proti směru,} \\ f(e) & \text{pokud } e \notin P. \end{cases}$$

Nyní je potřeba ověřit, že f' je skutečně tok:

$$0 \leq f'(e) \leq c(e) \ldots \text{platí stále díky volbě } \varepsilon.$$

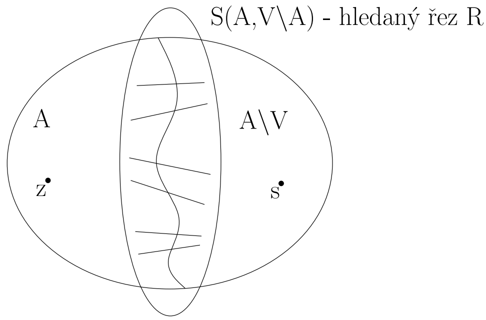
Platnost Kirchhoffova zákona ověříme rozborem případů:



Rozbor případů.

Funkce f' je tedy tok. Jeho velikost se ovšem oproti f zvýšila o ε, takže f nebyl maximální.

„$\Rightarrow$": Uvážíme množinu vrcholů $A \subseteq V(G)$ definovanou tak, že $v \in A$ právě tehdy, když existuje nenasycená cesta ze z do v. Všimněme si, že $z \in A$ a $s \notin A$. Potom



Rozdělení $V(G)$ na množinu A a $\overline{A}$ v důkazu hlavní věty o tocích.

$S(A,\overline{A})$ je řez, který je stejně velký jako tok f. Jak už víme, pokud k toku najdeme stejně velký řez, je tok maximální. ♡

To, co jsme o tocích zjistili, můžeme shrnout do následující „minimaxové“ věty:

Věta (Hlavní věta o tocích, Ford-Fulkerson): Pro každou síť platí:

$$\max_{f \text{ tok}} |f| = \min_{R \text{ řez}} c(R).$$

Důkaz: Nerovnost „$\leq$“ je náš Důsledek lemmatu o tocích a řezech, rovnost platí proto, že k maximálnímu toku existuje podle předcházející věty stejně velký řez. ♡

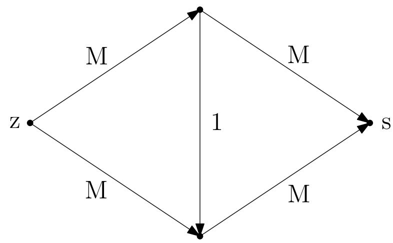
Zlepšování toků pomocí zlepšujících cest není jen pěkný důkazový prostředek, dá se pomocí něj také formulovat elegantní algoritmus na hledání maximálního toku:

Algoritmus (hledání maximálního toku v síti, Ford-Fulkerson)

1. $f \leftarrow$ libovolný tok, třeba všude nulový ($\forall e \in E : f(e) \leftarrow 0$).
2. Dokud $\exists$ zlepšující cesta P: vylepšíme f podél P jako v důkazu věty.
3. Prohlásíme f za maximální tok.

Cvičení:

- Je pro přirozené kapacity F-F algoritmus konečný? Ano – v každém zlepšujícím kroku algoritmu se celkový tok zvětší aspoň o jedna. Protože máme horní odhad na velikost maximálního toku (např. součet kapacit všech hran), máme i horní odhad na dobu běhu algoritmu.
- Je F-F algoritmus konečný pro racionální kapacity hran? Ano – všechny kapacity vynásobíme společným jmenovatelem a převedeme na předchozí případ. Algoritmus se přitom chová stejně jako s původními kapacitami.
- A pro reálné kapacity? Obecně ne – zkuste najít síť s některými kapacitami iracionální, kde se algoritmus při nešikovné volbě zlepšujících cest nikdy nezastaví a dokonce ani nekonverguje k maximálnímu toku.
- Kolik kroků bude muset algoritmus na následující síti maximálně udělat, aby úspěšně doběhl? ($2M$ kroků)



Příklad sítě. Kolik kroků musí maximálně udělat F-F algoritmus?

- Pokud bychom vždy hledali *nejkratší* zlepšující cestu, což je snad nejpřímočařejší možná implementace (prohledávání do šířky), algoritmus by se zastavil po $\mathcal{O}(M^2N)$ krocích (tomu se říká Edmondsův-Karpův algoritmus). To si nebudeme dokazovat a místo toho si na příští přednášce rovnou odvodíme efektivnější Dinicův algoritmus.