# 12. Problém minimální kostry *(zapsali K. Kaščák a M. Vachna)*

**Zadání úlohy:** Pro neorientovaný graf $G$ s ohodnocením hran *váhami* $w : E(G) \to \mathbb{R}$, chceme najít kostru $T$ s minimálním ohodnocením $w(T) = \sum_{e \in E(T)} w(e)$.

**Navíc předpokládáme:** (bez újmy na obecnosti)

- Graf $G$ je souvislý (jinak ho nejprve rozložíme na komponenty).
- $\forall e, f \in E(G) : e \neq f \Rightarrow w(e) \neq w(f)$.

Nyní si ukážeme tři algoritmy pro hledání minimální kostry, konkrétně se jedná o Jarníkův, Borůvkův a Kruskalův algoritmus.

### Jarníkův algoritmus

**Algoritmus:**

1. *Vstup:* Graf $G$ s ohodnocením $w$.
2. Zvolíme libovolný vrchol $v_0 \in V(G)$.
3. $T \leftarrow (\{v_0\}, \emptyset)$ (zatím jednovrcholový strom)
4. Dokud $|V(T)| \neq n$:
5. Vybereme hranu $uv \in E(G) : u \in V(T), v \notin V(T)$ tak, aby $w(uv)$ byla minimálni.
6. $T \leftarrow T + uv$.
7. *Výstup:* Minimální kostra $T$.

**Věta:** Jarníkův algoritmus se zastaví po maximálně $n$ iteracích a vydá minimální kostru grafu $G$.

*Důkaz:* Při každé iteraci algoritmus přidá jeden vrchol do $T$, a proto se po maximálně $n$ iteracích zastaví. Vydaný graf je strom, protože se stále přidává list k již existujícímu stromu, a jelikož má $n$ vrcholů, je to kostra. Zbývá nám už jen dokázat, že nalezená kostra je minimální. K tomu pomůže následující lemma:

**Definice:** *Řez* v grafu $G = (V, E)$ je množina hran $F \subseteq E$ taková, že $\exists U \subset V : F = \{uv \in E : u \in U, v \notin U\}$.

**Lemma:** Pokud $G$ je graf, $w$ jeho prosté ohodnocení, $F$ je řez v grafu $G$ a $f$ je nejlehčí hrana v řezu $F$, pak pro každou minimální kostru $T$ grafu $G$ je $f \in E(T)$.

*Důkaz:* Buď $T$ kostra a $f = uv \notin E(T)$. Pak existuje cesta $P \subseteq T$ spojující $u$ a $v$. Cesta musí řez alespoň jednou překročit. Proto existuje $e \in P \cap F$ a navíc víme, že $w(e) > w(f)$. Uvažme $T' = T - e + f$. Tento graf je rovněž kostra grafu $G$, protože odebraním hrany $e$ se graf rozpadne na dvě komponenty a přidáním hrany $f$ se tyto komponenty opět spojí. Navíc $w(T') = w(T) - w(e) + w(f) < w(T)$. ♡

V důkazu korektnosti Jarníkova algoritmu toto lemma využijeme tak, že si všimneme, že hrany mezi vrcholy stromu $T$ a zbytkem grafu tvoří řez a algoritmus nejlehčí hranu tohoto řezu přidá do $T$. Podle lemmatu tedy všechny hrany $T$ musí být součástí každé minimální kostry a jelikož $T$ je strom, musí být minimální kostrou.

♡

**Důsledky:** Graf $G$ s prostým ohodnocením má právě jednu minimální kostru. Minimální kostra je jednoznačně určená lineárním uspořádáním hran.

**Implementace:**

- Přímočará: pamatujeme si, které vrcholy a hrany jsou v kostře $T$ a které ne. Časová složitost je $\mathcal{O}(nm)$.
- Chytřejší: Pro $v \notin V(T)$ si pamatujeme $D(v) = \min\{w(uv) : u \in T\}$. Při každém průchodu hlavním cyklem pak procházíme všechna $D(v)$ (to vždy trvá $\mathcal{O}(n)$) a při přidání vrcholu do $T$ kontrolujeme okolní $D(w)$ pro $vw \in E$ a případně je snižujeme (za každou hranu $\mathcal{O}(1)$). Časovou složitost tím celkově zlepšíme na $\mathcal{O}(n^2 + m) = \mathcal{O}(n^2)$.
- Také se dá použít halda pro uchovávání hran nebo hodnot $D(v)$.

## Borůvkův algoritmus

**Algoritmus:**

1. *Vstup:* Graf $G$ s ohodnocením $w$.
2. $F \leftarrow (V(G), \emptyset)$
3. Dokud $F$ má alespoň dvě komponenty:
4. Pro každou komponentu $T_i$ grafu $F$ vybereme nejlehčí incidentní hranu $t_i$.
5. Všechny hrany $t_i$ přidáme do $F$.
6. *Výstup:* Minimální kostra $F$.

**Věta:** Borůvkův algoritmus se zastaví po $\lceil \log_2 n \rceil$ iteracích a vydá minimální kostru grafu $G$.

*Důkaz:* Všimněme si nejprve, že po $k$ iteracích mají všechny komponenty grafu $F$ minimálně $2^k$ vrcholů (na počátku jsou všechny komponenty jednovrcholové, v každé další iteraci se komponenty slučují do větších, každá s alespoň jednou sousední, takže se velikosti komponent minimálně zdvojnásobí). Proto nejpozději po $\lceil \log_2 n \rceil$ iteracích už velikost komponenty dosáhne počtu všech vrcholů a algoritmus se zastaví.

Hrany mezi každou komponentou a zbytkem grafu tvoří řez, takže podle předchozího lemmatu všechny hrany přidané do $F$ musí být součástí (jednoznačně určené) minimální kostry. Graf $F \subseteq G$ je tedy vždy les a až se algoritmus zastaví, bude roven minimální kostře. ♡

**Implementace:**

- Inicializace přímočará.
- Pomocí DFS rozložíme les na komponenty. Pro každý vrchol si pamatujeme číslo komponenty.
- Pro každou hranu zjistíme, do které komponenty patří, a pro každou komponentu si uchováme nejlehčí hranu.

Takto dokážeme každou iteraci provést v čase $\mathcal{O}(m)$ a celý algoritmus doběhne v $\mathcal{O}(m \log n)$.

**Kruskalův neboli hladový algoritmus**

**Algoritmus:**

1. *Vstup:* Graf $G$ s ohodnocením $w$.
2. Setřídíme všechny hrany z $E(G)$ tak, aby: $w(e_1) < ... < w(e_m)$.
3. $F \leftarrow (V(G), \emptyset)$.
4. Pro $i = 1$ do $m$:
5. Pokud $F + e_i$ je acyklický, provedeme $F \leftarrow F + e_i$.
6. *Výstup:* Minimální kostra $F$.

**Věta:** Kruskalův algoritmus se zastaví po $m$ iteracích a vydá minimální kostru.

*Důkaz:* Každá iterace algoritmu zpracovává jednu hranu, takže iterací je $m$. Indukcí dokážeme, že $F$ je vždy podgrafem minimální kostry: prázdné počáteční $F$ je podgrafem čehokoliv, každá hrana, kterou pak přidáme, je minimální v řezu oddělujícím nějakou komponentu $F$ od zbytku grafu (ostatní hrany tohoto řezu ještě nebyly zpracovány, a tudíž jsou těžší). Naopak žádná hrana, kterou jsme se rozhodli do $F$ nepřidat, nemůže být součástí minimální kostry, jelikož s hranami, o kterých již víme, že v minimální kostře leží, tvoří kružnici. ♡

**Implementace:**

- Setřídění v čase $\mathcal{O}(m \log m) = \mathcal{O}(m \log n)$.
- Pak potřebujeme udržovat komponenty souvislosti grafu $F$, abychom uměli rychle určit, jestli právě zpracovávaná hrana vytvoří kružnici. Potřebujeme tedy strukturu pro udržování komponent souvislosti, které se $m$-krát zeptáme, zda dva vrcholy leží v téže komponentě (tomu budeme říkat operace *Find*), a $(n-1)$-krát spojíme dvě komponenty do jedné (*Union*).

Kruskalův algoritmus tedy poběží v čase $\mathcal{O}(m \log n + mT_f + nT_u)$, kde $T_u$ je čas na provedení jedné operace *Union* a $T_f$ na operaci *Find*.

**Jednoduchá struktura pro komponenty:** Budeme pamatovat v poli čísla komponent, ve kterých leží jednotlivé vrcholy. *Find* zvládneme v čase $\mathcal{O}(1)$, ale *Union* bude stát $\mathcal{O}(n)$. Celý algoritmus pak poběží v čase $\mathcal{O}(m \log n + m + n^2) = \mathcal{O}(m \log n + n^2)$.

**Chytřejší struktura:** Každou komponentou si uložíme jako strom orientovaný směrem ke kořeni – každý vrchol si pamatuje svého otce, navíc každý kořen si pamatuje velikost komponenty. Operace *Find* vystoupá z obou vrcholů ke kořeni a kořeny porovná. *Union* rovněž najde kořeny a připojí kořen menší komponenty pod kořen té větší. Obojí zvládneme v čase lineárním v hloubce stromu a jak si ukážeme, tato hloubka je vždy nejvýše logaritmická, a proto celý Kruskalův algoritmus poběží v čase $\mathcal{O}(m \log n + m \log n + n \log n) = \mathcal{O}(m \log n)$.[1]

[1] Drobnou úpravou bychom mohli dosáhnout daleko efektivnější struktury, ale tu bychom neupotřebili, jelikož by nás stejně brzdilo třídění, a analýza složitosti by byla … inu, složitější.

**Lemma:** Strom hloubky $h$ má alespoň $2^h$ prvků.

*Důkaz:* Indukcí: Pokud *Union* spojí strom s hloubkou $h$ s jiným s hloubkou menší než $h$, pak hloubka výsledného stromu zůstává $h$. Pokud spojuje dva stromy stejné hloubky $h$, pak má výsledný strom hloubku $h + 1$. Z indukčního předpokladu víme, že strom hloubky $h$ má minimálně $2^h$ vrcholů, a tedy výsledný strom hloubky $h + 1$ má alespoň $2^{h+1}$ vrcholů. ♡

## Červeno-černé stromy

Ve zbytku přednášky se vrátíme k vyhledávacím stromům a ukážeme si ještě jeden způsob, jak udržet logaritmickou hloubku stromu.

**Definice:** *Červeno-černý strom* je binární vyhledávací strom, jehož vrcholy jsou obarvené (některé červeně, zbylé černě), a ke kterému byly přidány externí vrcholy všude tam, kde původnímu vrcholu chybí některý ze synů. Listy č-č stromu jsou tedy vždy externí. Navíc platí následující axiomy:

**Axiomy:**

- Kořen a externí vrcholy jsou černé.
- Otec červeného vrcholu je černý.
- Na všech cestách z kořene do externího vrcholu je stejný počet černých vrcholů.

**Věta:** Červeno-černý strom o $n$ vrcholech má hloubku $\mathcal{O}(\log n)$.

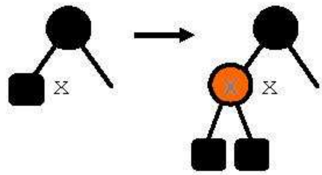
*Důkaz:* Zkomprimujeme všechny hrany spojující černý a červený vrchol, čímž všechny červené vrcholy „zasuneme“ do jejich černých otců. Vznikne 2, 4-strom a ten, jak už víme, má hloubku $\mathcal{O}(\log n)$. Původní č-č strom má tedy hloubku nejvýše $2 \log n$, což je asymptoticky taky $\mathcal{O}(\log n)$. ♡

*Alternativní důkaz:* ⟨2⟩ Předpokládejme, že $T$ je červeno-černý strom, který má na cestě z kořene do listu $k$ černých vrcholů. Pak pro počet vrcholů stromu $T$ platí $2^k - 1 \leq n \leq 2^{2k} - 1$. Nejmenší takový strom má všechny vrcholy obarvené černě a je to úplný pravidelný binární strom o hloubce $k - 1$, což dává dolní odhad. Největší takový strom má všechny vrcholy v sudých hladinách obarveny červeně a v lichých hladinách černě, je to úplný pravidelný binární strom o hloubce $2k - 1$ a tím je dán horní odhad. Tedy $k \leq 1 + \log n$. Z vlastností červeno-černých stromů plyne, že $k \leq \mathit{hloubka}(T) \leq 2k$. ♡

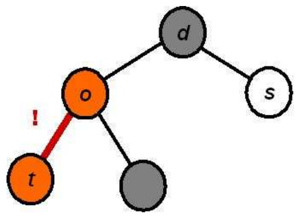
Nyní si rozebereme vkládaní do červeno-černých stromů.

**Insert:** Vložíme hodnotu do stromu jako do standardního binárního vyhledávacího stromu, tedy jako list, a obarvíme červeně. První ani třetí axiom jsme neporušili a pokud je předek černý, tak ani axiom druhý, čili jsme hotovi:

⟨2⟩ „Vy máte protipříklad? Nevadí, já mám dva důkazy :)“

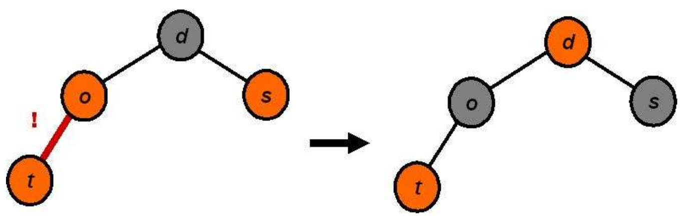



Jestliže je otec $o$ našeho vrcholu $t$ také červený, budeme říkat, že došlo k *poruše* a budeme se ji snažit opravit. Situace musí vypadat následovně:



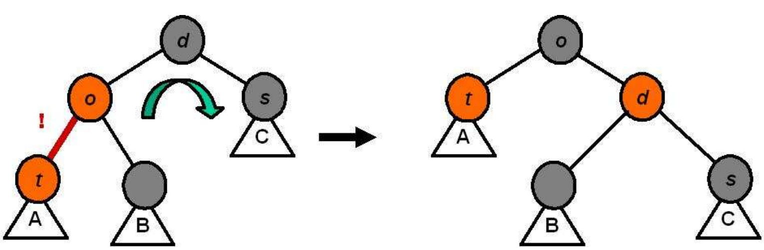

Nyní rozlišíme následující tři případy:

- Pokud strýc $s$ vrcholu $t$ je červený, pak pouze přebarvíme $o$, $d$ a $s$ podle následujícího obrázku. Nyní $d$ může být porucha, ovšem posunutá o 2 hladiny výše, takže při nejhorším pokračujeme do kořene a poslední poruchu opravíme přebarvením kořene na černo.




- Strýc $s$ je černý. Pak záleží na tom, zda hodnota $t$ leží mezi hodnotami $o$ a $d$ nebo ne. Jinými slovy, zda cesta $t - o - d$ obsahuje zatáčku.

  a) Bez zatáčky: Provedeme rotaci a přebarvíme. Splněny budou axiomy 1, 2 i 3, tedy máme červenočerný strom:



b) Se zatáčkou: Provedeme dvojitou (LR) rotaci a přebarvíme. Opět získáme korektní červenočerný strom: