

# Kombinatorika do kapsy

Martin Mareš  $\langle mj@ucw.cz \rangle$ , 2022-10-18

(1) **Značení:**

- $[n] := \{1, \dots, n\}$
- $n^{\underline{k}} := n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)$  (*klesající mocnina*)  
 $n^{\underline{0}} = 1$ , jelikož je to prázdný součin.

(2) **Počet funkcí** z  $n$ -prvkové množiny  $N$  do  $m$ -prvkové množiny  $M$ :

$$\#f : N \rightarrow M = m^n$$

$$\text{Nebo: } \#f : [n] \rightarrow [m] = m^n$$

Pro každý z  $n$  prvků si nezávisle na ostatních můžeme vybrat  $m$  možností, kam se zobrazí.

(3) **Princip bijekce:** pokud mezi konečnými množinami  $A$  a  $B$  existuje bijekce, tak mají stejný počet prvků. Speciálně tedy bývá jedno, jestli  $[n]$  je konkrétní množina  $\{1, \dots, n\}$ , nebo libovolná jiná  $n$ -prvková množina.

(4) **Počet podmnožin**  $n$ -prvkové množiny  $N$ :

$$|2^N| = 2^n$$

$$\text{Nebo: } \#A \subseteq N = 2^n$$

$$\text{Nebo: } |2^{[n]}| = 2^n$$

Podmnožině  $A \subseteq N$  přiřadíme *charakteristickou funkci*  $c_A : N \rightarrow \{0, 1\}$  definovanou tak, že  $c_A(x) = 1$  pro  $x \in A$  a  $c_A(x) = 0$  jinde. Každá taková funkce jednoznačně určuje podmnožinu (formálně: existuje bijekce mezi množinou všech podmnožin  $2^N$  a množinou všech funkcí z  $N$  do  $\{0, 1\}$ ). Proto je podmnožin stejně jako funkcí, podle (2) tedy  $2^n$ .

(5) **Počet sudých a lichých podmnožin**  $n$ -prvkové neprázdné množiny  $N$ . Označíme  $\mathcal{S} = \{A \subseteq N \mid |A| \text{ je sudé}\}$  množinu všech sudých podmnožin,  $\mathcal{L} = \{A \subseteq N \mid |A| \text{ je liché}\}$  množinu všech lichých podmnožin. Potom:

$$|\mathcal{S}| = |\mathcal{L}| = 2^{n-1}$$

Každá podmnožina je buď sudá nebo lichá, takže  $|\mathcal{S}| + |\mathcal{L}|$  je rovno počtu všech podmnožin, což podle (4) je  $2^n$ . Jakmile tedy ukážeme, že sudých a lichých je stejně, musí jak  $|\mathcal{S}|$ , tak  $|\mathcal{L}|$  být  $2^n/2 = 2^{n-1}$ .

To, že sudých a lichých je stejně, dokážeme sestrojením bijekce. Zvolíme nějaký prvek  $a \in N$  a pro  $A \subseteq N$  definujeme  $f(A) = A \Delta \{a\}$ . Čili pokud  $a$  leží v  $A$ , tak ho odebereme, pokud neleží, tak ho přidáme. Všimneme si, že  $f$  zobrazuje sudé množiny na liché a opačně. Dokonce je sama k sobě inverzní, takže je to bijekce mezi  $\mathcal{S}$  a  $\mathcal{L}$ .

(6) **Počet prostých funkcí** z  $n$ -prvkové množiny do  $m$ -prvkové množiny:

$$\#\{f : [n] \rightarrow [m] \mid f \text{ prostá}\} = m^n$$

Prvky  $[n]$  procházíme v nějakém pořadí a přidělujeme jim funkční hodnoty z  $[m]$ . Pro první prvek máme  $m$  možností, pro druhý už jen  $m - 1$  atd.

(7) **Kódování funkcemi.** Pomocí funkcí můžeme popisovat různé další objekty:

- $f : A \rightarrow \{0, 1\}$  odpovídají *podmnožinám* (jejich charakteristické funkce)
- $f : [k] \rightarrow A$  odpovídají *uspořádaným  $k$ -ticím*, tedy prvkům kartézské mocniny  $A^k$ :  $f(1)$  je první prvek  $k$ -tice,  $f(2)$  druhý atd.
- $f : [k] \rightarrow A$  prosté odpovídají *uspořádaným  $k$ -ticím bez opakování*
- $f : \mathbb{N} \rightarrow A$  odpovídají *nekonečným posloupnostem* prvků z  $A$

(8) **Permutace** na  $n$ -prvkové množině  $N$  říkáme bijekcím z  $N$  do  $N$ . Každá prostá funkce mezi dvěma stejně velkými množinami nutně musí být bijekce, takže počet bijekcí je podle (6) roven  $n^n = n!$ . Tomu říkáme *faktoriál* čísla  $n$ . Přitom  $0! = 1$ , opět se jedná o prázdný součin.

(9) **Lineární uspořádání** na  $n$ -prvkové množině  $N$  popíšeme očíslováním prvků od nejmenšího k největšímu, tedy bijekcí  $[n] \rightarrow N$ . Takových bijekcí je stejně jako permutací na  $N$ , tedy  $n!$ . Často jim dokonce také (lehce nepořádně) říkáme permutace.

(10) **Neuspořádané  $k$ -tice** neboli  $k$ -prvkové podmnožiny  $n$ -prvkové množiny  $N$ :

$$\#\{A \subseteq N \mid |A| = k\} = n^k/k!$$

Hledaný počet označme  $H$ . Budeme dvěma způsoby počítat uspořádané  $k$ -tice prvků  $N$  bez opakování. Jednak odpovídají prostým funkcím z  $\{1, \dots, k\}$  do  $A$ , takže podle (6) jich je  $n^k$ . Jednak můžeme každou neuspořádanou  $k$ -tici uspořádat  $k!$  různými způsoby, což dává  $H \cdot k!$  možností. Oběma způsoby musí vyjít totéž, takže  $H \cdot k! = n^k$ , a tedy  $H = n^k/k!$ .

(11) **Kombinační čísla (binomické koeficienty)** jsou užitečná zkratka pro právě odvozený vztah. Pro čísla  $n, k \geq 0$  zavedeme:

$$\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot k}$$

$$\text{Nebo: } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$$

Zavedeme-li navíc následující značení pro množinu všech  $k$ -prvkových podmnožin:

$$\binom{N}{k} = \{A \subseteq N \mid |A| = k\}$$

dostaneme stručný zápis vztahu (10):

$$\left| \binom{N}{k} \right| = \binom{n}{k}$$

(12) **Vlastnosti kombinačních čísel:**

- $\binom{n}{0} = 1$  ... prázdná podmnožina je jen jedna
- $\binom{n}{n} = 1$  ... „plná“ podmnožina je také jedna
- $\binom{n}{1} = n$  ... jednoprvkových je tolik, co prvků
- $\binom{n}{n-1} = n$  ...  $(n-1)$ -prvková podmnožina je určena tím, který jeden prvek v ní chybí
- $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$  ... obecně  $(n-k)$ -prvková podmnožina je určena tím, kterých  $k$  prvků v ní není
- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$  ... roztřídili jsme všechny podmnožiny  $n$ -prvkové množiny podle velikosti

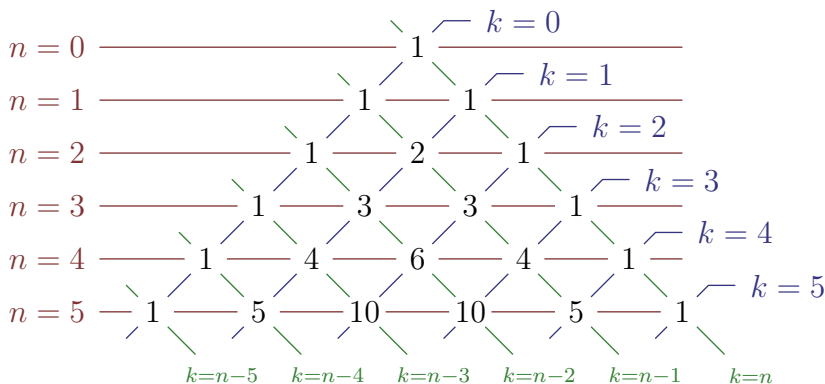
(13) **Charakteristické funkce**  $k$ -prvkových podmnožin množiny  $[n]$  vypadají tak, že právě  $k$  prvkům přiřazují jedničku a zbylým  $n - k$  nulu. Odpovídají tedy posloupnostem  $n$  nul a jedniček s právě  $k$  jedničkami.

(14) **Součet kombinačních čísel** pro  $n, k \geq 1$ :

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Levá strana počítá  $k$ -prvkové podmnožiny nějaké  $n$ -prvkové množiny  $A$ . Zvolíme libovolně  $a \in A$  a rozdělíme  $k$ -prvkové podmnožiny na dva druhy: neobsahující  $a$  a obsahující  $a$ . Těch prvních je  $\binom{n-1}{k}$ , protože vybíráme  $k$ -prvkovou podmnožinu ze zbylých  $n - 1$  prvků. Ty druhé obsahují kromě  $a$  ještě dalších  $k - 1$  prvků vybraných ze zbylých  $n - 1$  prvků, což lze vybrat  $\binom{n-1}{k-1}$  způsoby.

(15) **Pascalův trojúhelník** – tabulka kombinačních čísel:



Sledujte, jak se v Pascalově trojúhelníku projevují identity (12) a (14).

(16) **Binomická věta.** Pro každé  $x, y \in \mathbb{R}$  a  $n \in \mathbb{N}$  platí:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

Roznásobením součinu  $(x + y)(x + y) \dots (x + y)$  vznikne  $2^n$  členů. Každý z nich je součinem celkem  $n$  proměnných  $x$  a  $y$ , takže ho můžeme přerovnat na  $x^{n-k} y^k$  pro nějaké  $k$ . Stejný výraz vznikne přerovnáním ze všech členů, které z právě  $k$  závorek vybraly  $y$  a ze zbylých vybraly  $x$ . To lze provést  $\binom{n}{k}$  způsoby.

(17) **Aplikace binomické věty:**

- Pro  $x = y = 1$  dostaneme:  $(1 + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$ .

Takže součet  $n$ -tého řádku Pascalova trojúhelníku je  $2^n$ . To už známe z (12).

- Pro  $x = 1, y = -1$  dostaneme:  $(1 - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot (-1)^k$ .

Proto  $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \dots - \dots$ , takže sudých a lichých podmnožin je stejně – máme jiný důkaz tvrzení (5). (Mimočodem, kde jsme potřebovali předpoklad  $n > 0$ , bez kterého tvrzení neplatí?)

- Přijdete na nějaké další zajímavé dosazení?

(18) **Kuličky v přihrádkách.** Kolika způsoby jde rozmístit  $n$  nerozlišitelných kuliček do  $k$  rozlišitelných přihrádek? Přihrádky budeme plnit strojem, který umí příkazy  $K$  „přidej kuličku“ a  $P$  „ukonči přihrádku“. Existuje bijekce mezi rozmístěními kuliček do přihrádek a posloupnostmi příkazů pro stroj, které obsahují  $n$  příkazů  $K$ ,  $k$  příkazů  $P$  a končí příkazem  $P$ . Posloupnost je tedy dlouhá  $n + k$ , přičemž na prvních  $n + k - 1$  pozicích je nějak rozmístěno  $(k - 1) \times P$ . Počet takových posloupností je  $\binom{n+k-1}{k-1}$ .