

Problém s mincemi

Kolika způsoby lze zaplatit n korun pomocí mincí 1 Kč, 2 Kč a 5 Kč?

Uvažme následující polynomy:

$$P_1(x) = x^0 + x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + \dots$$

$$P_2(x) = x^0 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \dots$$

$$P_5(x) = x^0 + x^5 + x^{10} + x^{15} + x^{20} + \dots$$

Hledané číslo m_n je koeficient u x^n v polynomu:

$$P(x) = P_1(x) \cdot P_2(x) \cdot P_5(x)$$

Důkaz: Uvědomíme si, jak funguje násobení polynomů...

Značení:

$$m_n = [x^n] P(x)$$

Jiná formulace: Sčítáme řady

Všimneme si, že P_1 , P_2 i P_5 jsou nekonečné geometrické řady, takže je můžeme sečíst:

$$P_1 = 1/(1 - x)$$

$$P_2 = 1/(1 - x^2)$$

$$P_5 = 1/(1 - x^5)$$

Chceme tedy zjistit:

$$[x^n] P(x) = [x^n] \frac{1}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^5)}$$

Jenže nevíme, jak na to.

Pojďme tedy nejdřív prozkoumat jednodušší zlomky ...

Začneme od jedničky

$$[x^n] \frac{1}{1-x} = 1$$

$$[x^n] \frac{1}{1+x} = (-1)^n$$

$$[x^n] \frac{1}{1+\alpha x} = \alpha^n$$

$$[x^n] \frac{1}{\alpha - x} = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}x} = \alpha^{-1} \cdot \alpha^{-n} = \alpha^{-(n+1)}$$

Součin ve jmenovateli

Pokud chceme rozložit:

$$\frac{1}{(\alpha - x)(\beta - x)},$$

najdeme A a B , aby platilo:

$$\frac{1}{(\alpha - x)(\beta - x)} = \frac{A}{\alpha - x} + \frac{B}{\beta - x}$$

Jinými slovy chceme:

$$A(\beta - x) + B(\alpha - x) = 1$$

Z toho získáme soustavu rovnic:

$$A\beta + B\alpha = 1, \quad A + B = 0$$

Jejím řešením je:

$$A\beta - A\alpha = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{\beta - \alpha}, \quad B = \frac{-1}{\beta - \alpha}$$

Ale co když...?

Předchozí trik funguje pouze pokud $\alpha \neq \beta$.

Co tedy uděláme s výrazy

$$\frac{1}{(\alpha - x)^k} \quad ?$$

Použijeme zobecněnou binomickou větu:

$$\begin{aligned} [x^n] (1 - x)^{-k} &= (-1)^n \binom{-k}{n} = \\ &= (-1)^n \frac{(-k)(-k-1)\cdots(-k-n+1)}{n!} = \\ &= \frac{k(k+1)\cdots(k+n-1)}{n!} = \\ &= \frac{(k+n-1)!}{(k-1)! \cdot n!} = \frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+k-1)}{(k-1)!} = \binom{n+k-1}{k-1} \end{aligned}$$

A teď obecně: Rozklad na parciální zlomky

Věta: Bud' $f(x) = P(x)/Q(x)$, kde P a Q jsou polynomy. Nechť $Q(x) = (\alpha_1 - x)^{a_1} \cdot \dots \cdot (\alpha_k - x)^{a_k}$, kde $a_i \in \mathbb{N}$ a α_i jsou navzájem různá komplexní čísla. Pak existují polynomy R a $R_{i,j}$ takové, že:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} = & R(x) + \\ & + \frac{R_{1,1}(x)}{\alpha_1 - x} + \frac{R_{1,2}(x)}{(\alpha_1 - x)^2} + \dots + \frac{R_{1,a_1}(x)}{(\alpha_1 - x)^{a_1}} + \\ & + \dots + \\ & + \frac{R_{k,1}(x)}{\alpha_k - x} + \frac{R_{k,2}(x)}{(\alpha_k - x)^2} + \dots + \frac{R_{k,a_k}(x)}{(\alpha_k - x)^{a_k}} \end{aligned}$$

a (BÚNO) nelze žádný ze zlomků zkrátit.

(A každý takový zlomek už umíme převést na řadu ...)

Rozklad na parciální zlomky

Náznak důkazu:

- Pokud $f(x) = P(x)/Q(x)$ a P je netriviální, rozložíme nejdříve $1/Q(x)$, načež všechny členy výsledku vynásobíme P a zkrátíme.
- Pokud $f(x) = 1/(\alpha - x)$, jsme hotovi.
- Pokud $f(x) = 1/(\alpha - x)^a$, jsme také hotovi; krácením pak mohou vznikat členy s nižšími exponenty.
- Pokud $f(x) = 1/(Q_1(x) \cdot Q_2(x))$, kde Q_1 a Q_2 jsou nesoudělné polynomy, chceme najít A_1 a A_2 takové, aby $1/(Q_1 \cdot Q_2) = A_1/Q_1 + A_2/Q_2$, jinými slovy aby bylo $A_1Q_2 + A_2Q_1 = 1$.

Stačí spustit na Q_1 a Q_2 Euklidův algoritmus a ten takovou lineární kombinaci najde (koeficienty jsou samozřejmě zase polynomy).

Zpátky k našim \$\$\$

Chceme rozložit zlomek

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^5)}$$

Jak je to s kořeny:

$$(1-x^2) = (1-x)(1+x)$$

$$(1-x^5) = (1-x)(\omega^1-x)(\omega^2-x)(\omega^3-x)(\omega^4-x)$$

Zde $\omega = e^{2\pi i/5}$ a navíc $\overline{\omega^1} = \omega^4$ a $\overline{\omega^2} = \omega^3$, takže:

$$(\omega^1-x)(\omega^4-x) = 1 - 2\cos\frac{2\pi}{5}x + x^2 = 1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x - x^2$$

$$(\omega^2-x)(\omega^3-x) = 1 - 2\cos\frac{4\pi}{5}x + x^2 = 1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x - x^2$$

Proto:

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)^3(1+x)(1 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x - x^2)(1 + \frac{1+\sqrt{5}}{2}x - x^2)}$$

(Nebojte se, dobře to dopadne.)

Povoláme posily: Mathematicu

Rozklad na parciální zlomky podle Mathematicy:

$$\begin{aligned} P(x) = & \\ & - \frac{1}{10 (-1 + x)^3} + \frac{1}{4 (-1 + x)^2} - \frac{13}{40 (-1 + x)} \\ & + \frac{1}{8 (1 + x)} \\ & - \frac{5 - \sqrt{5} + (5 + \sqrt{5})x}{25 (-2 + (-1 + \sqrt{5})x - 2x^2)} \\ & + \frac{6 + 2\sqrt{5} + 4x}{5 (5 + \sqrt{5})(2 + (1 + \sqrt{5})x + 2x^2)}. \end{aligned}$$

(Pokus o rozklad komplexního tvaru skončil záplavou.)

Mathematica v akci: převádíme na komplexní tvar

Všimneme si, že pro $w = (-1)^{1/5}$ vyjde:

$$w - w^4 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}, \quad w^2 - w^3 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Takže poslední dva členy můžeme také psát jako:

$$\begin{aligned} & - \frac{3 + \sqrt{5} + 2x}{5(5 + \sqrt{5})(w^4 - x)(w + x)} \\ & - \frac{5 - \sqrt{5} + (5 + \sqrt{5})x}{50(w^2 - x)(w^3 + x)}. \end{aligned}$$

To už se nám hodí, protože:

$$[x^n] \frac{\alpha + \beta x}{f(x)} = \alpha \cdot [x^n] \frac{1}{f(x)} + \beta \cdot [x^{n-1}] \frac{1}{f(x)}$$

a to už rozložit umíme.

Sečteno a potvrženo

$$\begin{aligned} m_n = [x^n] P(x) = & \\ & \frac{1}{10} \cdot [x^n] \frac{1}{(1-x)^3} + \frac{1}{4} \cdot [x^n] \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{13}{40} \cdot [x^n] \frac{1}{1-x} \\ & + \frac{1}{8} \cdot [x^n] \frac{1}{1+x} \\ & - \frac{3+\sqrt{5}}{5(5+\sqrt{5})} \cdot [x^n] \frac{1}{(w^4-x)(w+x)} \\ & - \frac{2}{5(5+\sqrt{5})} \cdot [x^{n-1}] \frac{1}{(w^4-x)(w+x)} \\ & - \frac{5-\sqrt{5}}{50} \cdot [x^n] \frac{1}{(w^2-x)(w^3+x)} \\ & - \frac{5+\sqrt{5}}{50} \cdot [x^{n-1}] \frac{1}{(w^2-x)(w^3+x)}. \end{aligned}$$

Jak vyjdou kvadratické členy

$$\begin{aligned} [x^n] \frac{1}{(w^4 - x)(w + x)} &= [x^n] \frac{-1}{(w^4 - x)(-w - x)} \\ &= [x^n] \left(\frac{1}{w + w^4} \cdot \frac{1}{w^4 - x} + \frac{-1}{w + w^4} \cdot \frac{1}{-w - x} \right) \\ &= \frac{1}{w + w^4} \left(w^{-4(n+1)} - (-w)^{(n+1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [x^n] \frac{1}{(w^2 - x)(w^3 + x)} &= [x^n] \frac{-1}{(w^2 - x)(-w^3 - x)} \\ &= [x^n] \left(\frac{1}{w^2 + w^3} \cdot \frac{1}{w^2 - x} + \frac{-1}{w^2 + w^3} \cdot \frac{1}{-w^3 - x} \right) \\ &= \frac{1}{w^2 + w^3} \left(w^{-2(n+1)} - (-w)^{-3(n+1)} \right) \end{aligned}$$

Volejte sláva a tři dny se radujte!

$$m_n = [x^n] P(x) =$$

$$\begin{aligned} & \frac{(n+1)(n+2)}{20} + \frac{n+1}{4} + \frac{13}{40} + \frac{(-1)^n}{8} \\ & - \frac{3+\sqrt{5}}{5(5+\sqrt{5})} \cdot \frac{1}{w+w^4} \cdot \left(w^{-4(n+1)} - (-w)^{-(n+1)} \right) \\ & - \frac{2}{5(5+\sqrt{5})} \cdot \frac{1}{w+w^4} \cdot \left(w^{-4n} - (-w)^{-n} \right) \\ & - \frac{5-\sqrt{5}}{50} \cdot \frac{1}{w^2+w^3} \cdot \left(w^{-2(n+1)} - (-w)^{-3(n+1)} \right) \\ & - \frac{5+\sqrt{5}}{50} \cdot \frac{1}{w^2+w^3} \cdot \left(w^{-2n} - (-w)^{-3n} \right) \end{aligned}$$

Ufffff...

Post-scriptum aneb ráno je moudřejší večera

Jelikož $w^{10} = 1$, musí být posledních šest členů periodických:

$$\begin{array}{ll} \delta(0) = 13/20 & \delta(5) = 2/5 \\ \delta(1) = 1/5 & \delta(6) = 9/20 \\ \delta(2) = 13/20 & \delta(7) = 2/5 \\ \delta(3) = 0 & \delta(8) = 1/4 \\ \delta(4) = 1/4 & \delta(9) = 0 \end{array}$$

Takže celou formuli můžeme zjednodušit na:

$$m_n = \frac{n^2 + 8n + 7}{20} + \delta(n \bmod 10).$$

Happy End.