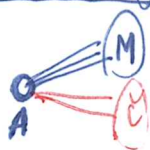


Intro: - co je DM, účel kursu, přednáška + cvičení, nahrávky + stream

- <https://uj.uan.cz/vyuka/dm>

Matfyzáci v trávě: 6 lidí, telace "znát se" (symetrické) → $\exists \Delta$ nebo Δ } vizualizace (graf)
 zpočátku neformální, ale precizní; později doplníme formalismus PTEJE SE?

Řešení:



$$|M| + |C| = 5 \Rightarrow |M| \geq 3 \vee |C| \geq 3 \text{ (obutěnou)}$$

bud' mezi M je $\Delta \Rightarrow \Delta$ s A
 nebo samé $\Delta \Rightarrow \Delta$ uvnitř M

Souvislosti: Ramseyovy věty, "neexistuje dokonalý chaos"

Nekonečně mnoho prvočísel (à la Euklides) - důkaz sporem

- kdyby jich bylo konečně mnoho, můžeme je vyjmenovat: $p_1 < p_2 < \dots < p_n$

- nyní uvažme $x = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$

• $x > p_n \Rightarrow x \neq p_i$ pro všechna $i \Rightarrow x$ není prvočíslo

• tedy $\exists i: p_i \mid x$... to ale není možné, protože $x \bmod p_i = 1$

Součet $S_n = 1 + 2 + \dots + n$... značení: $S_n = \sum_{i=1}^n i$ ← aritmetická řada (spec. případ)
 ← co je $\mathbb{N}$?

- okrajové případy: $S_0 = 0, S_1 = 1$

- přeuspořádání: $S_n = 1 + 2 + \dots + (n-1) + n$

$$S_n = n + (n-1) + \dots + 2 + 1$$

$$2S_n = (n-1) + \dots + (n-1) + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n}{2}$$

- můžeme dokázat indukcí ... obecný princip: $\varphi(0) \wedge (\forall n(\varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$

$$\varphi(n): \underbrace{1 + \dots + n}_{S_n} = \frac{n(n+1)}{2}$$

indukční předpoklad indukční krok

$$\varphi(0): 0 = \frac{0 \cdot 1}{2} \checkmark$$

$$n \rightarrow n+1: \text{víme } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{chceme } S_{n+1} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$S_{n+1} = S_n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \text{ Q.E.D.}$$

Součet $g_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1}$ ← geometrická řada

$$\text{pokus: } q=10 \quad 10^0 + 10^1 + 10^2 + \dots + 10^{n-1} = \underbrace{1 \dots 1}_n = \frac{9 \dots 9}{9} = \frac{10^n - 1}{9}$$

- pro $q=3$ trojková soustava ... $\frac{3^n - 1}{2}$

- hypotéza: $g_n = \frac{q^n - 1}{q - 1}$... pokud $q \neq 1$... jinak $g_n = n$

- můžeme dokázat indukci:

• $g_0 = 0 = \frac{q^0 - 1}{q - 1} = 0 \checkmark$

jiný způsob:
 $g_n = q^0 + q^1 + \dots + q^{n-1}$
 $q \cdot g_n = q^1 + q^2 + \dots + q^n$
 $\Rightarrow (q-1)g_n = q^n - 1$

• $n \rightarrow n+1: g_{n+1} = g_n + q^n = \frac{q^n - 1}{q - 1} + q^n = \frac{q^n - 1 + q^n(q - 1)}{q - 1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \checkmark$

- trik: jelikož se jedná o rovnost polynomů, stačí, když platí pro dost různých q (můžeme si vybrat)

Součet $\square_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$

- malé případy: $\square_0 = 0, \square_1 = 1, \square_2 = 5, \square_3 = 14 \dots$ pattern?

- hypotéza: je to kubický polynom, tedy $\square_n = an^3 + bn^2 + cn + d$ pro nějaké a, b, c, d

- pak: $\square_0 = 0 \Rightarrow d = 0$

$\square_1 = 1 \Rightarrow a + b + c = 1$

$\square_2 = 5 \Rightarrow 8a + 4b + 2c = 5$

$\square_3 = 14 \Rightarrow 27a + 9b + 3c = 14$

$c = \frac{1}{6}$

$b = \frac{1}{2}$

$6a + 2b = 3$

$24a + 6b = 11$

$6a = 2 \rightarrow a = \frac{1}{3}$

- mělo by tedy být $\square_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$

- ověříme indukci (D.Ú.)

Platíme pomocí 3Kč a 5Kč - které částky jsou zaplatit?

"indukce s prefixem"

0 ✓	8 ✓
1 ✗	9 ✓
2 ✗	10 ✓
3 ✓	11 ✓
4 ✗	12 ✓
5 ✓	13 ✓
6 ✓	14 ✓
7 ✗	15 ✓

odd.

od 11 dál můžeme
indukovat

Princip: $\varphi(n_0) \& (\forall n \geq n_0: \varphi(n) \Rightarrow \varphi(n+1))$
 $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \varphi(n)$

• $\varphi(n)$ = "pro 8 ať n to jde"
 $n_0 = 10$

Existence zápisů ve dvojkové soustavě - každé $n \geq 0$ jde zapsat jako součet různých mocnin dvojky

Silná indukce: $\varphi(0) \& (\forall n (\forall k < n \varphi(k)) \Rightarrow \varphi(n)) \Rightarrow \forall n \varphi(n)$

• $\varphi(n)$ = "n lze zapsat"

• $\varphi(0) \checkmark$ (prázdný součet)

• n : nechť 2^i je nejvyšší mocnina 2 menší rovná n

$n' = n - 2^i \dots n' < n \Rightarrow \varphi(n')$ platí ... vezmeme zápis n' a přičteme 2^i

• zesílení úvahy: zápis existuje právě jeden (ať na pořadí sčítanců)

- každý zápis n musí obsahovat 2^i ,
neboť $2^0 + \dots + 2^{i-1} = 2^i - 1 < n$

- stačí ukázat jednoznačnost zápisu $n! \in \mathbb{N}$

neumíže ale obsahovat 2^i ?
kdyby ano, pak $n' \geq 2^i$
a tedy $n \geq 2^i + 2^i = 2^{i+1}$
 $\Rightarrow 2^i$ nebyla největší

Dělitelnost

$a \setminus b \equiv \exists c: b = ac$  $1 \setminus b$ pro všechna b
 $a \setminus 0$ pro všechna a (0/0 platí)
 $-3 \setminus 6 \dots$ obecně funguje pro $\mathbb{Z}$

(3)

$$a \setminus b \Leftrightarrow a \bmod b = 0$$

Kongruence $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow n \setminus a - b \Leftrightarrow a \bmod n = b \bmod n$

"chová se jako rovnost" - $a \equiv a$, $a \equiv b \Leftrightarrow b \equiv a$, $a \equiv b \ \& \ b \equiv c \Rightarrow a \equiv c$ (R, S, T)

$a \equiv a'$, $b \equiv b' \Leftrightarrow a + b \equiv a' + b'$... sečteme kongruence nebo vynásobíme výraz za kongruentní

$$\Leftrightarrow a - b \equiv a' - b'$$

$\Rightarrow ab \equiv a'b'$... ale pozor, tady $\Leftarrow$ obecně neplatí
modulo 4: $2 \cdot 2 \equiv 2 \cdot 4$, ale $2 \not\equiv 4$

↓
představa
ciferníku hodin

Skoumáme $n^2 \bmod 4$

$\rightarrow$ pro n sudé je $4 \setminus n^2$

pro n liché je $n^2 \bmod 4 = 1$... tedy $n^2 \equiv 1 \pmod{4}$

$$n^2 \equiv 0$$

n	n^2	$n^2 \bmod 4$	$\bmod 8$
0	0	0	0
1	1	1	1
2	4	0	4
3	9	1	1
4	16	0	0
5	25	1	1
6	36	0	4
7	49	1	1

• lze indukovat

• nebo také $(2n)^2 \equiv 4n^2 \equiv 0 \cdot n^2 \equiv 0$

$$(2n+1)^2 \equiv 4n^2 + 4n + 1 \equiv 0 + 0 + 1 \equiv 1$$

• co $\bmod 8$? $(2n+1)^2 \equiv 4n^2 + 4n + 1 \equiv 0 + 1$
 $\underbrace{4n(n+1)}_{\text{sudé}}$

Celočíslné kořeny polynomů

uvažujme $f(x) = 4x^5 - 12x^4 - 5x^3 + 15x^2 + x - 3 \dots$ jaké má kořeny?

... to je obecně těžké (Galoisova věta), ale celočíslné jsou najít snadno

Obecně: necht' $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ je polynom s celočíslnými koeficienty $a_0 - a_n$

Pokud x je kořen: $\sum_{i=0}^n a_i x^i = 0 \dots$ uvažme $\bmod |x|$

$x \neq 0$ } $x=0$
se pozná
snadno ($a_0 \neq 0$)

$$\hookrightarrow \underbrace{a_0 x^0 + a_1 x^1 + \dots + a_n x^n}_{\text{jsou dělitelné } x, \text{ tedy } \equiv 0} \equiv a_0$$

$$\text{z toho } a_0 \equiv 0 \pmod{x}$$

Díjnými slovy $x \setminus a_0$

... takže stačí prozkoumat konečné mnoho dělitelů a_0

V našem případě $a_0 = -3$... kandidáti jsou

+1	✓	$4 - 12 - 5 + 15 + 1 - 3 = 0$
-1	✓	$-4 - 12 + 5 + 15 - 1 - 3 = 0$
+3	✓	
-3	✗	

Vylepšení: racionální kořeny (pro celočíselné koeficienty)

(4)

Nechť $\sum_i a_i (\frac{p}{q})^i = 0$... vynásobíme obe strany $q^n \rightarrow \sum_i a_i p^i q^{n-i} = 0$

Nyní mod p : $p \nmid a_0$
 mod q : $q \nmid a_n$ } konečně mnoho kandidátů
 V našem případě: $p \in \{\pm 1, \pm 3\}$, $q \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 4\}$
 Funguje $\frac{1}{2}$ a $-\frac{1}{2}$... a to už je 5 kořenů
 $\Rightarrow$ jsou všechny reálné

Jedničkova čísla (a.k.a. repunits)

$J_n = \underbrace{1 \dots 1}_n$... platí pro nějaké n : $2017 \mid J_n$?

• zobecníme pro dělitelnost jakýmkoliv m

• malé případy:

m	J_n	m	J_n	m	J_n
1	1	6	x	11	11
2	x	7	111 111 = 111 · 1001	13	111111
3	111	8	x	17	?
4	x	9	111 111 111		
5	x	10	x		

4 pokud je m dělitelné 2 nebo 5, evidentně to nejde

• hypotéza: pro všechna ostatní n to jde

• uvažujeme všechna $J_n \bmod m$... konečně mnoho zbytků $\Rightarrow$ princip holubníku

takže $\exists i > j: J_i \equiv J_j \pmod{m}$

$\Rightarrow J_i - J_j \equiv 0 \pmod{m}$

číslo tvaru $\underbrace{1 \dots 1}_{i-j} \underbrace{0 \dots 0}_j = J_{i-j} \cdot 10^j$

} jelikož m není dělitelné 2 ani 5, máme $m \mid J_{i-j}$ $\square$

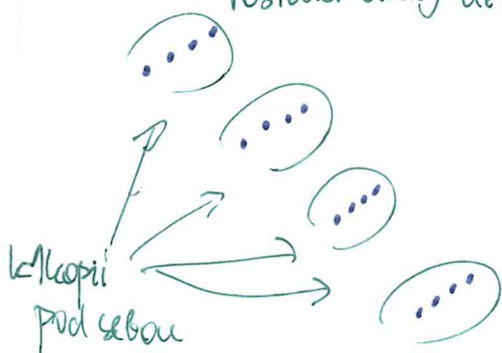
Monotónní ^{pod} posloupnosti

Dostaneme posloupnost $x_1 \dots x_n \in \mathbb{R}$ různých čísel

Jak dlouhá rostoucí/klesající vybraná podposloupnost v ní musí být?

Pokus o konstrukci dlouhé posl. bez dlouhých monotónních pp.:

rostoucí úseky délky $r-1$



- neobsahuje rostoucí pp. délky r
 - ani klesající pp. délky k
 - má celkem $n = (r-1)(k-1) + 1$ prvků
- Ukažeme, že je nejdelší možná.

Jak se buduje matematika

- definice objektů matematického světa

$\left\{ \begin{array}{l} \text{pomocí jednoduchších objektů} \\ \text{pomocí axiomů} \end{array} \right\}$ třeba přiroz. čísla
 např. u množin

přiroz. čísla
 $\downarrow$
 celá čísla
 $\downarrow$
 dělitelnost
 $\downarrow$
 prvočísla

- uplatníme tvrzení (hypotézy) a zvažujeme, jestli platí

věta lemma pozorování

- může se také stát, že tvrzení je nerozhodnutelné

o pravdivosti nás přesvědčí důkaz

idea: je to postupnost kroků (konечná?)
 každý plyne buď přímo z definic/axiomů
 nebo z předchozích kroků
 "triviálním způsobem"

pořádně
 viz
 logika

Matematická notace

- pro čísla: $\lceil x \rceil$ horní celá část (zaokrouhlení nahoru)
 $\lfloor x \rfloor$ dolní celá část (zaokrouhlení dolů)

např. $\lceil 1.35 \rceil = 2$ $\lfloor 1 \rfloor = \lfloor 1.1 \rfloor = 1$
 $\lceil 1.35 \rceil = 2$
 $\lfloor -1.35 \rfloor = -2$

- "tri tečky": $x_1 + x_2 + \dots + x_n$
 (nebo "—") $1 + 2 + \dots + n$

$2 + 4 + \dots + n$ } nejasné - sudá, nebo 2^k ?
 $2^1 + 2^2 + \dots + 2^k$

důvod: chceme, aby platilo

$$\sum_{i=1}^n f(i) = \left(\sum_{i=1}^{n-1} f(i) \right) + f(n) \quad \text{i pro } n=1$$

- Suma: $\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} i^2$$

$$\sum_{i \in \{1, \dots, n\}} \frac{1}{i} \quad \& \text{ i prvočíslo}$$

pozor: průběžná suma $\sum_{i=1}^0 i = 0$

nebo $\sum_{0 \leq i \leq 1} i = 0$
 & i prvočíslo

$\rightarrow$ analogický produkt $\prod_{i=1}^n i = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

též značíme $n!$ (faktoriál)
 průběžný produkt $= 1$

- množiny:

$\{1, 3, 7\} = \{7, 1, 3, 1, 1\}$

$\{\} = \emptyset$ } pozor: $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

$\{ \emptyset, \emptyset \}$

$\{ \emptyset, \{1\} \}$

$|A| := \# \text{ prvků (konечné) množiny}$

$\mathbb{N}$ - pro nás včetně 0

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$

- operace s množinami:

$x \in A$

je prvkem

$A \subseteq B \equiv \forall a \in A: a \in B$ je podmnožinou

$A \cap B := \{a \in A \mid a \in B\}$ průnik

$A \cup B$ sjednocení

$A \setminus B := \{a \in A \mid a \notin B\}$ rozdíl

$A \Delta B := (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ symetrický rozdíl

$2^A = \mathcal{P}(A) := \{B \mid B \subseteq A\}$ potency

$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$ výběr podmnožiny

$\{x^2 \mid x \in A\}$ nahrazení prvků jinými

Věta (Erdős-Šzekeresová): Postoupnost délek (alespoň) $(r-1)(k-1)+1$ obsahuje rostoucí pp. délky r nebo klesající pp. délky k

(5)

Dle: pro $x_1 \dots x_n$

def. (a_i, b_i) , kde $a_i :=$ délka nejdelší rostoucí pp končící prvkem x_i
 $b_i :=$ — " — klesající — " —

Sporem: pokud $\exists$ dost dlouhá pp., je vždy $1 \leq a_i \leq r-1$, $1 \leq b_i \leq k-1$
 $\Rightarrow (r-1)(k-1)$ možných hodnot dvojice, ale $n > (r-1)(k-1)$

Tedy podle principu holubůvek $\exists i, j$: $i < j$, $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$

To ale není možné: Buď $x_i < x_j$, ale pak $a_j \geq a_i + 1$
 nebo $x_i > x_j$, — " — $b_j \geq b_i + 1$ $\downarrow$

Přidávky

- Neexistují dvě mocniny 2 lišící se jen pořadím cifer.
- Wilsonova věta: n je prvočíslo $\Leftrightarrow (n-1)! + 1$ je dělitelné n
- Čínská zbytková věta (díkat holubůvkám)
- 3 doměty a 3 studny

KOMBINATORIKA

- KOLIK JE OBJEKTŮ DANÉHO DRUHU?

Příklady:

- ① # slov o 8 písmenech z $\{a-z\} = 26^8 \leftarrow 26 \text{ znaků Angl. abecedy} \leftarrow 2 \text{ písmenka } \leftarrow \begin{matrix} 26 \\ \text{řádků} \end{matrix} \leftarrow \text{pak pokračujeme indukci}$
- ② ... všechna písmena různá: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 19 = 26^{\underline{8}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{8 \text{ členů}}$
- ③ # přesmyček slova KRUTOVLADCE $= 11^{\underline{11}} = 11!$ $\leftarrow$ jiný lepší příklad: ZPRACHNIVĚLOST
 či ZUBOLEKARSTVÍ (nejdelší roztomilá bez opakování)
- ④ # přesmyček slova JEZEVEC ... nejdrívě JEZEVEC $= 7!$
 • 3! = 6 způsobů, jak E-čka očíslovat $\Rightarrow$ # přesmyček $\cdot 3! = 7!$
 $\Rightarrow$ # přesmyček $= \frac{7!}{3!}$

$\hookrightarrow$ technika počítání dvěma způsoby

př. 5) # rozestavení 8 věží na šachovnici 8×12 aby se neohrožovaly. (6)
 ... v každém sloupci právě 1 věž: posloupnost $r_1 - r_8 \in \{1-12\}$
 (vlastně slovo nad 12-znakovou abecedou)
 a všechna r_i jsou navzájem různá $\rightarrow 12^8$ možností

Druhý pohled: hledám funkce, které přiřazují sloupcům řádky: $f: \{1-8\} \rightarrow \{1-12\}$
 neboli zobrazení

6) co kdyby věží bylo jen 5?

Nejprve si je odčíslyme: 8^5 možností, jak vybrat sloupce
 12^5 možností, jak nezávisle vybrat řádky } $8^5 \cdot 12^5$ rozestavení

A pak vydělíme $5!$.

Zobecníme: # k -znakových slov z n -znakové abecedy $= n^k$
 ... bez opakování $= n^{\underline{k}}$ co se stane pro $k=0, n=0$,
 případně $k > n$?
 # pořadí abecedy (permutací) $= n! = n!$
 # neuspořádaných k -tic vybraných z n prvků $= \frac{n!}{k!}$

funkcí z $\{1-k\}$ do $\{1-n\}$
 # prostých funkcí
 # bijekcí z $\{1-n\}$ do $\{1-n\}$
 $\uparrow$ také se jím říká permutace

Princip kódování: Kolik podmnožin má množina $1 \dots n$? (malý případ: $n=2, n=3$)

Podmnožinu popíše charakteristickou posloupností $c_1 - c_n \in \{0,1\}$
 $\uparrow A \subseteq \{1-n\}$ $\uparrow c_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \notin A \\ 1 & \text{if } i \in A \end{cases}$

podmnožin $=$ # posloupností $= 2^n$ Příklad pro $n=2$: $\emptyset \rightarrow 00, \{1\} \rightarrow 01, \{2\} \rightarrow 10, \{1,2\} \rightarrow 11$
 známení: $2^X = \mathcal{P}(X)$
 vlastně mám bijekci mezi podmnožinami a posloupnostmi $\Rightarrow$ je jich stejně

Druhý pohled: charakt. funkce $\{1-n\} \rightarrow \{0,1\}$

Argument bijekci: Necht' $\mathcal{Y} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je sudý}\}$ $\leftarrow$ "sudé a liché podmnožiny"
 a $\mathcal{X} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je lichý}\}$

Ukažeme bijekci mezi $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X} \Rightarrow |\mathcal{Y}| = |\mathcal{X}| \Rightarrow$ jelikož $|\mathcal{Y}| + |\mathcal{X}| = 2^n$, musíme oba být 2^{n-1} .

Zvolíme $a \in [n]$, množině X přiřadíme $X \mapsto \{a\} \Delta X = \{x \in \{1-n\} \mid x \in X \text{ právě tehdy když } x \neq a\}$
 $\uparrow$ symetrický rozdíl

Pro liché n funguje jako bijekce doplněk. Ale co pro sudé n ?

$\hookrightarrow$ Sudé množině přiřadím lichou a naopak
 inverze sama k sobě $\Rightarrow$ je to bijekce mezi $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X}$

Počítáme k -prvkové podmnožiny $[n]$ - to jsou vlastně neuspořádané k -tice z $[n]$

$\Rightarrow$ je jich $\frac{n!}{k!}$ $\leftarrow$ takže značíme $\binom{n}{k}$ "n nad k" - kombinační číslo
 též značíme jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ což je totéž (ale pozor na případ $k > n$)
 neboli binomický koeficient

V char. posloupnostech: posl. 0/1 délky n , v nichž je právě k jedniček
 to by také šlo počítat jako přesmyčky slov $\underbrace{1-1}_{k} \underbrace{0-0}_{n-k}$

Vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{n-1} = n \rightarrow \text{obecně } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{rozkládáme (pod) množiny podle \# prvku}$$

počítáme prvky, co nejsou v množině

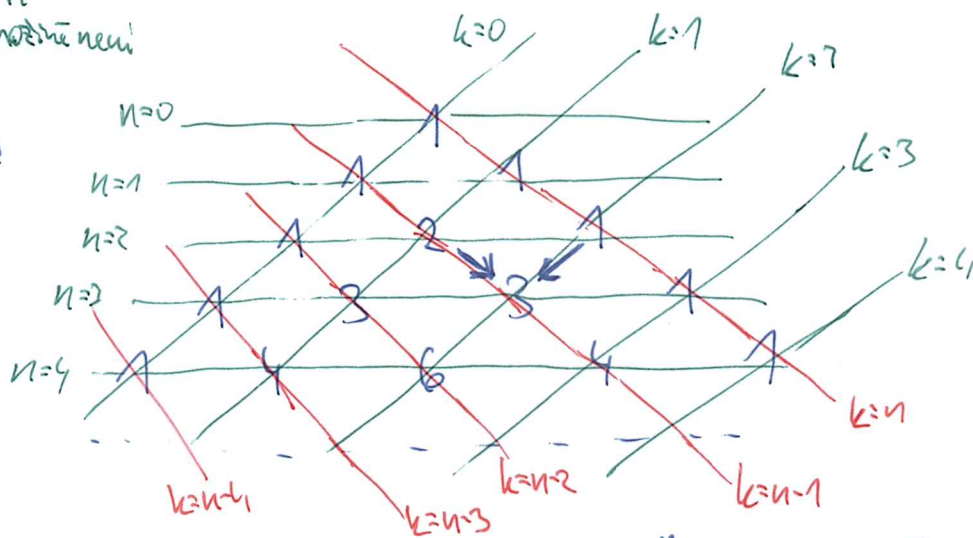
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

prvek n
v podmnožině není

je tam

kombinatorický argument (šlo by též upočítat z definice)

Pascalův Δ (tabulka $\binom{n}{k}$)



Vše je vidět zde

Binomická věta: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ } také můžeme chápat jako rovnost polynomů ve 2 proměnných

Důkaz: Roznásobujeme $(x+y)(x+y) \cdots (x+y) = \underbrace{xxx \dots x + xx \dots xy + \dots + y \dots y}_{n \text{ závorek}}$
 $\forall$ člen si z n závorek vybere x nebo y
 $\Rightarrow 2^n$ členů, ale všechny jsou tvaru $x^{n-k} y^k$

Kolik členů je tvaru $x^{n-k} y^k$? Máme z n závorek k -krát vybrat $y \rightarrow \binom{n}{k}$.

Odtáčka: Jak vypadá multinomialní věta? Treba $(x+y+z)^n$?

Příklady: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$... už známe

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + \dots \binom{n}{n}$$

pro $n > 0$

sudých a lichých podmnožin je stejné

Další zajímavá číselní?

Rozklady na součet: kolika způsoby lze n zapsat jako $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ ($\forall x_i \in \mathbb{N}$)
 na pořadí nám záleží

Umísťujeme n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných (očíslovaných) přihrádek.
 Kódování: posloupnost $\bullet$ a $|$ (krajní u počítání) $\Rightarrow n+k-1$ pozic, k z nich je $|$
 $\Rightarrow$ lze vybrat $\binom{n+k-1}{k}$ způsobů.

PRAVDEPODOBNOST

(8)

"Pravděpodobnost, že na kostce padne 6, je rovna $1/6$." - Co to vlastně znamená?

- Empirický pohled: když budu kostkou házet dostatečně dlouho,
 $\#6 / \# \text{ pokusů}$ se bude blížit $1/6$
- Matematický model náhody: $\text{pravděpodobnost} = \frac{\# \text{ výsledků pokusu, kde jev nastane}}{\# \text{ možných výsledků pokusu}}$
 $\hookrightarrow$ první pokus, časem vylepšíme

začneme příklady...

① kostka ... 6 možných výsledků ... $P(\text{padne } 6) = 1/6$

$$P(\text{padne sudé}) = 3/6 = 1/2$$

$$P(\text{padne prvočíslo}) = 3/6 = 1/2$$

② dvě kostky ... $6^2 = 36$ výsledků ...
 (rozlišitelné, třeba červená a modrá)

$$P(\text{na červené padne } 6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{na obou padne tolik}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{červená} > \text{modrá}) = \frac{36-6}{2 \cdot 36} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$$



③ narozeninový paradox

30 lidí v místnosti

předpokládáme, že narozeniny padnou
 na každý den stejně často
 a že rok má 365 dní

$P(\text{existuje dvojice s narozeninami v tentýž den})$

$$= 1 - P(\text{všichni mají různé narozeniny}) \doteq 0.706$$

$$\frac{365 \cdot 30}{365 \cdot 30} \doteq 0.294$$

$\hookrightarrow$ možné výsledky posloupnosti délek 30 z $\{1 - 365\}$

④ šedesátá kostka - 6 padne s pětí $1/2$, 1...5 s pětí $1/10$

$$P(\text{padne sudé}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{17}{20}$$

Zobecníme: Df: Diskrétní pravděpodobnostní prostor se skládá z:

• Ω : konečná nebo spočetná množina elementárních jevů (možné výsledky pokusu)

• $p: \Omega \rightarrow [0,1]$ funkce přiřazující elem. jevům jejich pravděpodobnost

$$\text{t.j. } \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

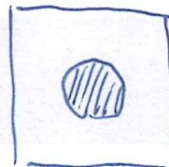
Df: Je-li $A \subseteq \Omega$, přiřadíme mu pravděpodobnost $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) \leftarrow \text{vždy leží v } [0,1]$

☹️ striktně vzato, elem. jev není jev ... ale můžeme ztotožnit $\omega \in \Omega$ s $\{\omega\}$.

Typické případy: • konečný pr. prostor: Ω konečná

• klasický pr. prostor: $\forall \omega \in \Omega: p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

⑤ Příklad, na který naše definice nestačí:



Kapky deště dopadají náhodně na stůl. Jaká je pr., že kapka dopadne do misy?

Základní obraty: Pro jevy $A, B \subseteq \Omega$:

- $\bar{A} := \Omega \setminus A$... doplněk jevu / jev opačný: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \cup B$... nastane A nebo B:
 - pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - obecně $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
- $A \cap B \dots$? platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$? Jen někdy (viz úvodní příklady)

1 kostka: "padlo sudé" a "padlo dělitelné 3" } je
 1 kostka: "padlo sudé číslo" a "padlo prvočíslo" } není
 2 kostky: "na 1. padla 6" a "na 2. padla 6" } je

Df: Jevy A, B jsou nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

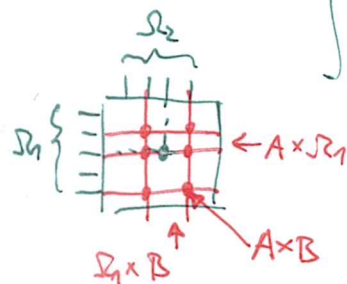
Příklad: 32 karet, náhodně zamícháme ($\Omega =$ všechny permutace karet) $\{1, \dots, 32\}$

$A =$ "na 1. místě je 1" ... formálněji: $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega(1) = 1\}$ $P(A) = \frac{1}{32}$
 $B =$ "na 2. místě je 2" $P(B) = \frac{1}{32}$
 $P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{31 \cdot 32} \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ závislé

Příklad: Dvojice pokusů: $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2) \rightarrow (\Omega, P)$, kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P((a, b)) = P_1(a) \cdot P_2(b)$

Ověříme, že součet = 1: $\sum_{a \in \Omega_1} \sum_{b \in \Omega_2} P_1(a) P_2(b)$
 $= \sum_{a \in \Omega_1} \left(P_1(a) \cdot \underbrace{\sum_{b \in \Omega_2} P_2(b)}_1 \right) = \sum_{a \in \Omega_1} P_1(a) = 1.$
 ↑ kartézský součin = $\{(a, b) \mid a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$ } Součin prostních prostorů

Jev $A \subseteq \Omega_1$: rozšíříme na $A \times \Omega_2$... $P(A \times \Omega_2) = P_1(A)$
 Jev $B \subseteq \Omega_2$: — u — $\Omega_1 \times B$... $P(\Omega_1 \times B) = P_2(B)$
 👁 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$



$\rightarrow$ jevy týkající se různých pokusů v sadě jsou nezávislé!

$\hookrightarrow$ můžeme zobecnit na postupnost více pokusů ... jak se pak chová nezávislost?

Df: Jevy $A_1 - A_n$ jsou po k nezávislé $\equiv \forall I \in \binom{[n]}{k} : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$
 nejdrůbežněji si představíme $k=2$ všechny k-prvkové podmnožiny indexů

Jevy $A_1 - A_n$ jsou nezávislé $\equiv$ jsou po k nezávislé pro všechna $k \in \{2, \dots, n\}$.

Příklad: $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, P klasická
 $A = \{10, 11\}$ (první je 1) $P(A) = 1/2$
 $B = \{01, 11\}$ (druhá je 1) $P(B) = 1/2$
 $C = \{00, 11\}$ (11 sudý) $P(C) = 1/2$

Dvojice: $A \cap B = \{11\}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A) \cdot P(B)$
 $A \cap C = \{11\}$, $P(A \cap C) = \frac{1}{4}$
 $B \cap C = \{11\}$, $P(B \cap C) = \frac{1}{4}$ } po 2 nezávislé

Trojice: $A \cap B \cap C = \{11\}$, $P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4}$
 ale $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = \frac{1}{8}$ } po 3 nejsou nezávislé

$\Rightarrow A, B, C$ nejsou nezávislé

Příklad: kartičky $\bar{C}, C, Z, Z, \dots$ podíváme se na náhodnou kartičku z náhodné strany.
Vidíme, že je $\bar{C}$. Jaká je pr., že druhá strana je také $\bar{C}$?

Jak vypadá pr. prostor? $\Omega = \{ \bar{C}\bar{C}, \bar{C}C, \bar{C}Z, C\bar{C}, CZ, ZZ \}$, P klasická

↓ zobecnění

nastala 1 z těchto 3 možností, všechny stejně pravděpodobné
... ale jen ve 2 z nich je druhá strana $\bar{C}$
 $\Rightarrow pr = 2/3$.

Def: Podmíněná pr. jevu A za podmínky jevu B je $P(A|B) := P(A \cap B) / P(B)$.



$A \cap B$ je jev v podprostoru B , dělení $P(B)$ srovná pravdep., aby se sečetly na 1. ↑ potřebujeme $P(B) \neq 0$.

☺ A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(B) = 0$ nebo $P(A|B) = P(A)$.] to, jestli nastalo B , nijak neovlivní $P(A)$.

Příklad: Házíme kostkami X, Y . Jaká je pr., že $|X - Y| = 1$? jev S - "sousedi"

① Pokud $X \in \{1, 6\}$, pak je $P(|X - Y| = 1) = 1/6 \dots P(S|E) = 1/6$ jev E - "extrémi"] vidíme $P(S \cap E) = P(S|E) \cdot P(E) = 1/18$
 $P(S \cap \bar{E}) = P(S|\bar{E}) \cdot P(\bar{E}) = 2/9$
② Jindy: $P(S|\bar{E}) = 2/6 = 1/3$ ↓

ale: $P(S \cap E) + P(S \cap \bar{E}) = P(S)$ neboť $S \cap E, S \cap \bar{E}$ je rozklad S na disj. podmnožiny
 $\frac{1}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$

→ vážený průměr případů, váhy jsou jejich psti.

Věta: (o úplné pravděpodobnosti, též o rozboru případů).

Nechť $A \subseteq \Omega$, $B_1, \dots, B_k \subseteq \Omega$ je rozklad Ω ($B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $\forall i B_i \neq \emptyset$, $\bigcup_i B_i = \Omega$)
t.č. $\forall i P(B_i) > 0$.

Pak $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

Příklad: Test na nemoc (nebo třeba na spam).

Jevy N = "je nemocný"

T = "test vyšel pozitivně"

Z laboratoře víme:

$P(T|N) = 0.95$ Ale: 0.95
 $P(T|\bar{N}) = 0.03$ 0.03
nač $P(N) = 0.06$ 0.001

$\rightarrow P(T \cap N) = P(T|N) \cdot P(N) = P(N|T) \cdot P(T)$
 $\Rightarrow P(N|T) = \frac{P(T|N) \cdot P(N)}{P(T)} = \frac{0.95 \cdot 0.06}{0.0852} \approx 0.67 \approx 0.0307$

přičemž $P(T)$ spočítáme rozborem případů:

$P(T) = P(T|N) \cdot P(N) + P(T|\bar{N}) \cdot P(\bar{N}) \approx 0.0852$
 $0.95 \cdot 0.06 + 0.03 \cdot 0.94 = 0.0309$

↓ opět zobecníme

Věta (Bayesova): Pro $A \subseteq \Omega$ jev
a $B_1, \dots, B_k$ rozklad Ω
t.č. $\forall i P(B_i) > 0$:

$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j (P(A|B_j) \cdot P(B_j))}$

Hádanka: Hráč A napíše na 100 karet různá celá čísla, v náhodném pořadí je ukazuje hráči B.

"problém najímání sekretářky" (11)

Hráč B může po lib. kartě říci STOP a vyhrává, pokud stopnul na max. čísla. Jakou má zvolit strategii?

↳ pokus: prohlédneme si prvních 50 a pak zastavíme na 1. větší

☹️ strategie uspěje např. tehdy, je-li 2. největší v 1. polovině a největší v 2. polovině
Spočítejme, jakou to má pr:

$$\frac{50 \cdot 50 \cdot 98!}{100!} = \frac{50 \cdot 50}{100 \cdot 99} = \frac{25}{99} = 0.\overline{25} > 1/4$$

} celkově je tedy pr. úspěchu $> 1/4$

• Jak spočítat pr. úspěchu přesně? vyjde cca 0.349

• Je dělení na 50 + zbytek optimální? pro zjednoduš. výpočet ano, pro přesný je lepší 57 + zbytek $\rightarrow pr \approx 0.371$

Hádanka #2: Jak pomocí falešné mince simulovat pravou?

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Příklad: "Problém Sekretářky" - n páni si uloží klobouky do šatny, sekretářka jim je vydá v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostal svůj klobouk?

↳ Pr. prostor Ω : permutace $\pi: [n] \rightarrow [n] \leftarrow$ značí se S_n

pán dostal svůj klobouk: $\pi(i)=i \leftarrow$ pevný bod permutace

My chceme $P(\{\pi \in \Omega \mid \forall i \pi(i) \neq i\}) \leftarrow P(\text{náhodná permutace nemá pevný bod})$

↳ Uvažujme malé případy:

n=0
prázdná šatna
nemá pevný bod
 $\rightarrow P=1$

n=1
1 x
 $P=0$

n=2
12 x
21 ✓
 $P=1/2$

n=3
123 x
132 x
213 x
231 ✓
312 ✓
321 x
 $P=2/6=1/3$

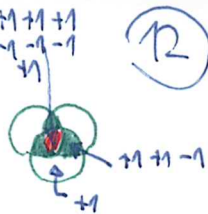
n=5
21453 } 2 rozšíření
21534 } prefixu 21
23154 } ale prefix 23
23451 } má 3 rozšíření
23514 }

• Pokus: pro $n=3$ počítáme "špatné" permutace (s pevným bodem):

1xx ... 2
x2x ... 2
xx3 ... 2
} ale třeba 12x jsme započítali 2x
 $\rightarrow$ odečteme $12x(1), 1x3(1), x3(1)$

-- ale 123 jsme nezapočítali vůbec $\rightarrow +1$

↳ volby na jednotlivých pozicích se netriviálně ovlivňují

- To je vlastně: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$ 

↓ zobecníme pro n množin

Věta (Princip inkluze a exkluze) Pro konечné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

[Dokážeme za chvíli ... teď zpět k šatnářce]

Alternativně:

$$\left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

- $A_1 - A_n$: $A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \}$ ← i je pevný bod

- $A := \bigcup_i A_i$ ← mají aspoň 1 pevný bod ... zajímá nás tedy $|A|$ (přesněji řečeno $n! - |A|$)

- pro PIE potřebujeme: $|A_i| = (n-1)!$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

⋮

$$\text{průnik } k \text{ množin: } (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$\binom{n}{k}$ stejných členů

$$\rightarrow S = \frac{n!}{k!} \cdot (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

$$P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)$$

- Nás zajímá jev opačný: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

👁 Pro $n \rightarrow \infty$ konverguje $P(\bar{A})$ k $\frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \# A_i$, v nichž se vyskytuje x ← $\# A_i : x \in A_i$

Průniky k množin $\rightarrow 1 \cdot x$ → přispěje $(-1)^{k+1}$

$j > k$ množin $\rightarrow 0 \cdot x$

$j < k$ množin $\rightarrow \binom{k}{j}$ j -tic obsahuje x → celkem přispěje $(-1)^{j+1} \binom{k}{j}$

$$\text{Sečtením přes všechna } j: \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 1$$

kdybychom počítali od 0,
bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty.
Tahle chytí $(-1)^0 \binom{k}{0} = 1 \rightarrow$ vyjde -1

Druhý důkaz PIE (abstraktnější)

13

- zvolíme $A := \bigcup_i A_i$... každé $X \subseteq A$ přiřadíme charakteristickou funkci

$$c_X: A \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{t.j.} \quad c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$

- Vlastnosti char. funkcí:
 - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
 - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{X \cap Y}} = 1 - (1 - c_X)(1 - c_Y)$
 - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$
 $\uparrow A \setminus X$
 - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$

- Roznásobíme $\prod_{i=1}^n (1 + \underbrace{x_i}_{\text{proměnné}}) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i$ $\xrightarrow{\text{dosaz. } x_i \leftarrow -c_{A_i}}$ $\prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$

- Dosadíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:
$$\underbrace{\prod_{i=1}^n (1 - c_{A_i})}_{c_{\overline{A}}} = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} c_{A_i}}_{\text{pro } I \neq \emptyset \text{ je to } c_{\bigcap_{i \in I} A_i}} \\ \underbrace{\hspace{10em}}_{c_{\bigcap_{i \in I} \overline{A_i}}} \quad \text{pro } I = \emptyset \text{ je to } 1 \\ = 1 - c_{\bigcup_i A_i}$$

- Upravíme:
(do podoby ještě
bližší PIE)

$$\cancel{1 - c_{\bigcup_i A_i}} = \cancel{1} - \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

- Nakonec sečteme
přes všechna $a \in A$:

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad \dots \text{ejhle, PIE?}$$

Příbuzná otázka: Kolik pevných bodů má průměrně náhodná permutace?

Model pro podobné otázky:

Df. Náhodná veličina na pr. prostoru je funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ $\leftarrow$ třeba #1 při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jemu $\{ \omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1 \}$

Df. Střední hodnota $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$ $\leftarrow$ vážený průměr (váhy = psti)

$\leftarrow$ pro nekonečnou Ω nemusí existovat

 $E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a$ $\leftarrow$ nelekejte se nespočetné sumy - nejvýše spočetné členy může být nenulových

! E není medián ! $\rightarrow$ většina lidí má nadprůměrný #rukou ∞
 $E[\#rukou] < 2 \Rightarrow P(\#rukou > E(\dots)) = 1 - \epsilon$

(14)

to je m t.j. $P(X < m) \leq 1/2$
 $P(X > m) \leq 1/2$

Příklad: 2 kostky, $S = \text{součet hodnot}$: $E(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a) \cdot a = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \dots + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{36} \cdot 12$
 $\downarrow$ ale jde to počítat snáz

Věta (linearita střední hodnoty): Necht' X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

① $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

② $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

} důkaz rozepsáním dle definice

$X = \text{hodnota 1. kostky}$

$Y = \text{hodnota 2. kostky}$

} $E(X) = E(Y) = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$S = X+Y \rightarrow E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$

A zpět k Satnáře: $B := \# \text{ černých bodů (náh. veličina)}$

$B_1, \dots, B_n$: $B_i(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ pokud $\pi(i) = i$ } indikátor jestli "i je černý bod"

$B = \sum_i B_i \rightarrow E(B) = E(\sum_i B_i) = \sum_i E(B_i) \leftarrow E(B_i) = P(B_i=1) = \frac{1}{n}$
 $= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ještě 1 příklad na indikátory: Posloupnost n hodů mincí ... $\Omega = \{0,1\}^n$
 Chceme $E(\underbrace{\# \text{ úseků stejných hodnot}}_U)$

$U_1, \dots, U_n$... $U_i := \text{indikátor jestli "na pozici } i \text{ začíná úsek"}$

U_1 je vždy 1 $\rightarrow E(U_1) = 1$

jinak $U_i \in \{0,1\}$ $p = 1/2 \rightarrow E(U_i) = 1/2$

$\nwarrow$ i-tý hod se liší od (i-1)-tého

} $E(U) = \sum_i E(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

GRAFY, CESTY, TAHY

15

Úloha: Mosty města Královce (a.k.a. Königsbergu / Kaliningradu) - Euler 1736
... nebo také kreslení domečku jedním tahem

↳ graf (matem. struktura) Df: (V, E) , kde V je množina vrcholů (konечná, neprázdná)
a $E \subseteq (V \times V)$ množina hran

↳ grafy jsou dobré modely (binárních) vztahů mezi nějakými objekty

Příklad: Náměstí spojená ulicemi, stany hlavnímu otd.

$e = \{u, v\}$ je
hrana mezi
vrcholy u, v
 $u \in E, v \in E$

• Cestování po grafu: posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$
kde $\forall i \ v_i \in V, \forall j \ e_j \in E, \forall j \ e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$

• Co se smí opakovat? ① celkově $\rightarrow$ sled, ② nic $\rightarrow$ cesta, ③ jen vrcholy $\rightarrow$ tah

↳ hledáme eulerovský tah - to je takový, jenž obsahuje všechny vrcholy i hrany grafu

uzavřený
 $\equiv v_0 = v_n$

otevřený
 $\equiv v_0 \neq v_n$

to je také potřeba:

proč nestačí
posl. hran?

proč ne vrcholy?

Čto zatím naše
def. grafu
nedovoluje, ale
časem ji
rozebereme)

• Kritné podmínky pro existenci uzavřeného euler. tahu:

① graf musí "držet pohromadě": Df: Graf je souvislý $\equiv$
pro všechny $u, v \in V$
existuje cesta z u do v

Lemma: Pokud existuje sled z u do v , existuje i cesta z u do v .

Dk: Uvažme nejkratší sled z u do v . $\leftarrow$ nezapomenout ošetřit případ $u=v$.
Kdyby nebyl cestou, existuje nějaký vrchol t , který se v něm opakuje



tuto část můžeme odstranit
a tak získat kratší sled $\hookrightarrow$

② každý vrchol se účastní sudého počtu hran: Df: Stupeň vrcholu $\deg_G(v) = |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Uvažme uzavř. eul. tah T a všechny výskyty nějakého vrcholu v :



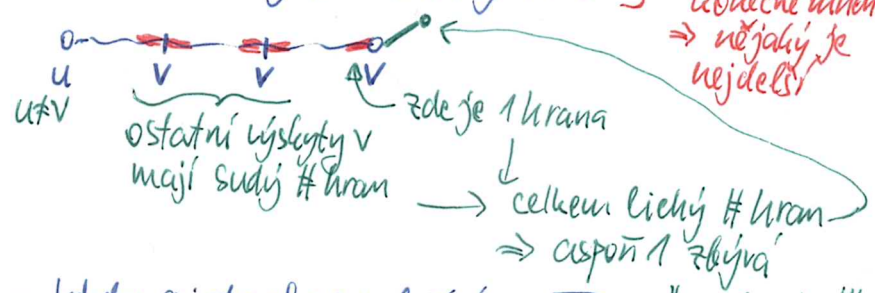
Každá hrana z vrcholu v leží před/zá výskytem $v \rightarrow$ dvojice hran.

Dvojice se nepřekrývají $\Rightarrow \# \text{hran} = 2 \cdot \# \text{dvojic}$, což je sudé.

Věta: Graf má uzavřený eulerovský tah $\Leftrightarrow$ je souvislý & všechny vrcholy mají sudé stupně.

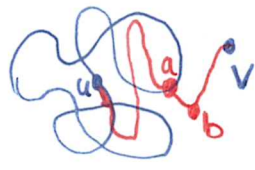
Důkaz: $\Rightarrow$ už máme hotové, zbývá $\Leftarrow$. Uvažme nejdelší možný tah T . ☹️ tah je konečně mnoho $\Rightarrow$ nějaký je nejdelší

① T je uzavřený: kdyby nebyl:



Tah můžeme prodloužit $\downarrow$

② T obsahuje všechny vrcholy ... kdyby existoval v neležící na T , $\Leftarrow$ "nenakreslený" vrchol vyberme libovolný u na T a najdeme cestu P z u do v (souvislost $\Rightarrow$ existuje).



Cesta P začíná na T , končí mimo $\Rightarrow$ někde je přechod...
vyberme poslední $a \in P$, které leží na T
a následníka $b \in P$, ten už na T neleží

- $\rightarrow b$ je nenakreslený a sousedí s nakresleným a hranou.
- $\rightarrow$ tah "rozeštrhneme" při libovolném příchodu a , přidáme hranu $\{a, b\}$
- $\rightarrow$ získali jsme delší tah $\downarrow$

③ T obsahuje všechny hrany ... kdyby existovala nenakreslená hrana $\{u, v\}$, kde u, v jsou nakreslené vrcholy

- $\rightarrow$ tah rozeštrhneme v u a prodloužíme o hranu $\{u, v\}$
- $\rightarrow$ opět spor s maximalitou T $\downarrow$

☹️ Co otevřené tahy? Souvislost & právě 2 vrcholy lichého stupně. (cvičení)

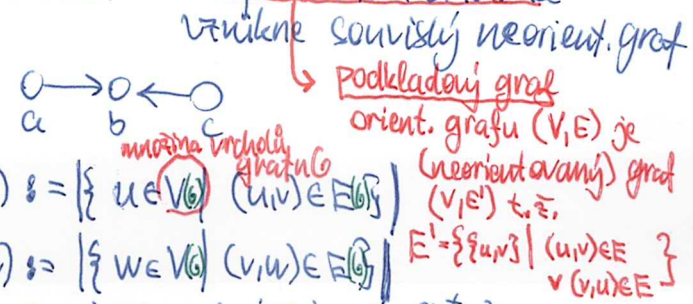
Grafy můžeme definovat orientované ... příklad: "ireverzibilní" tahy ve lákách, jednosměrné ulice

Df: Orientovaný graf je dvojice (V, E) , kde V je konečná množina vrcholů a $E \subseteq V^2$ množina hran (šipek). ☹️ lépe též neprázdná $\leftarrow$ přípustí smyčky

- sledy, tahy, cesty zobecníme přímocárě
- lemma sled $\rightarrow$ cesta stále funguje
- souvislost se komplikuje: a) silná souvislost $\equiv \forall u, v \in V \exists$ cesta $u \rightarrow v$ (orientovaná)

b) slabá souvislost $\equiv$ "zapomenutím orientace"

☹️ silná $\Rightarrow$ slabá, ale ne opačně:



- stupně se rozdělí na vstupní $\deg_{in}^G(v) := |\{ u \in V \mid (u, v) \in E \}|$ a výstupní $\deg_{out}^G(v) := |\{ w \in V \mid (v, w) \in E \}|$
- místo sudosti stupňů: Df: G je vyvážený $\equiv \forall v \in V(G) : \deg_{in}^G(v) = \deg_{out}^G(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(17)

- ① G je vyvážený a slabě souvislý.
- ② G obsahuje uzavřený eulerovský tah.
- ③ G je vyvážený a silně souvislý.

} Proto: pro vyvážené grafy je silná a slabá souvislost ekvivalentní

Dk: ① $\Rightarrow$ ③ ... snadná úprava důkazu neorientované verze věty

② $\Rightarrow$ ③ ... takéž

③ $\Rightarrow$ ① ... přímo z definice souvislosti

Souvislosti:

- najít eul. tah je snadné (algoritmicky)
- najít hamilton. cyklus je těžké

naštiní každý vrchol právě 1x

Cvičení: Jak vypadají grafy s otevřeným euler. tahem? (orientované)

Cvičení: Co kdyby mezi 2 vrcholy bylo více hran? (multigraf)

Příklad: Otvíráme sejt, hledáme posloupnost čísel, v níž se každé trojčíslí vyskytne aspoň jednou. (nebo obecně k -číslí...)

Zjednodušení: Dvojková soustava místo desítkové, $\rightarrow$ pro $k=2$ funguje 0110
posloupnost je cyklická.

☹ Je potřeba délka $\geq 2^k$... ukažeme, že tolik stačí.

Df: de Bruijnova posloupnost řádu k je cyklická posloupnost 0,1 délky 2^k
t.j. každý k -znakový řetězec 0,1 se v ní vyskytuje právě jednou.

$\hookrightarrow$ jako souvislá podposloupnost

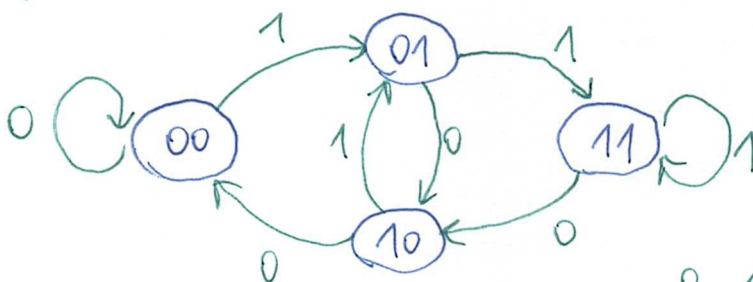
Věta: Pro každý řád $k \geq 1$ existuje dBp. řádu k .

Dk: Pro $k=1$ je věta triviální (posl. 01 je dBp.), ukažeme $k \geq 1$.

Sestrojíme orientovaný graf: $V := \{0, 1\}^{k-1}$

$$E := \{ (x_1 - x_{k-1}, x_2 - x_k) \mid x_1 - x_{k-1} \in \{0, 1\}^{k-1} \}$$

Příklad pro $k=3$:



- ☹ • $\deg^{\text{in}}(v) = 2$
- $\deg^{\text{out}}(v) = 2$
- graf je souvislý

} graf je vyvážený

$\Downarrow$
 $\exists$ uzavřený euler. tah

☹ když tah dojde do vrcholu $x_1 - x_{k-1}$
předchozích $k-1$ hran je určeno $x_1 - x_{k-1}$

$\hookrightarrow$ když chcí najít $x_1 - x_k$,
vyberu ten ze dvou výskytů $x_1 - x_{k-1}$,
po kterém následuje x_k .

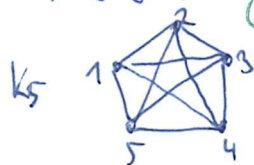
$\hookrightarrow$ posl. 01011100 je dBp. řádu 3.

posloupnost
:= označení
hran
v pořadí
daném tahem

Cvičení: Rozšířte na libovolnou konečnou abecedu.

Zpět ke grafům: ukážeme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n ($n \geq 1$)
(kompletní)



$$V = \{1, \dots, n\}$$

$$E = \left(\frac{V}{2}\right)$$

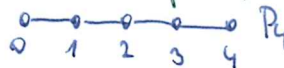
Prázdný graf E_n ($n \geq 1$)

$$V = \{1, \dots, n\}$$

$$E = \emptyset$$

Cesta P_n ($n \geq 0$)

(path)

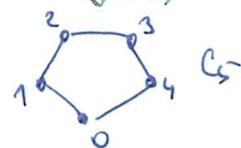


$$V = \{0, \dots, n\}$$

$$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$$

Kružnice C_n ($n \geq 3$)

(cyklus)



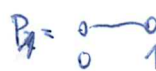
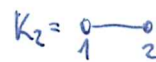
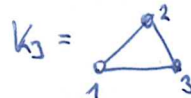
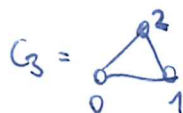
$$V = \{0, \dots, n-1\}$$

$$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$$

👁 Některé grafy "vypadají stejně",
i když jsou různé

Df: Grafy G a H jsou izomorfní

$\equiv$ liší se jen označením vrcholů.



Rozmyslete si:
Které další dvojice
grafů K_n, E_n, P_n, C_n
jsou izomorfní?

} později řekneme pořádně

Už známe: stupně $\deg_G(v)$... Df: Graf je k -regulární pro $k \in \mathbb{N} \equiv \forall v \in V \deg(v) = k$
regulární $\equiv \exists k$: je k -regulární

👁 K_n je $(n-1)$ -regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg., P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Df: Obě strany počítají "konce hran",
formálněji (v, e) t.č. $e \in E, v \in e$

$\rightarrow$ důsledek: graf obsahuje sudý počet
vrcholů lichého stupně

"princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy!

Podgrafy: Df: Graf $G' = (V', E')$ je podgrafem grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

$\hookrightarrow$ značíme $G' \subseteq G$

... je indukovaným podgrafem: $V' \subseteq V, E' = E \cap \binom{V'}{2} \leftarrow$ vybereme vrcholy
a zůstatíme hrany

$\hookrightarrow G[V'] :=$ podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

👁 Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)

Podgrafy E_n jsou zase jen prázdné.

Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: souvislost: pro každé 2 vrcholy
 $\exists$ cesta, která je spojuje

cesta v grafu

posloupnost vrcholů
a hran

podgraf izomorfní
s P_n pro nějaké n

Nesouvislý graf můžeme rozložit na

komponenty souvislosti $\equiv$ souvislé podgrafy
maximální v inkluzi:

analogicky
kružnice v grafu

Ale pozor, sledy
nejde obecně popsat
jako podgrafy?

$K \subseteq G$ je komponenta $\equiv K$ je souvislý & $\forall K' : K \not\subseteq K' \subseteq G$ není souvislý.

☹️ Graf je souvislý $\Leftrightarrow$ má právě 1 komponentu souvislosti. ⚠️ Problematické! kdybychom dovolovali $V=\emptyset$ (19)

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
 $\hookrightarrow$ označme $T(n)$. Pro srovnání: K_n má $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ hran

• Malé případy: $T(1)=0$ • $T(3)=2$  $T(5)=6$  ... lepší než C_5 s 5 hranami
 $T(2)=1$  $T(4)=4$  $T(6)=?$  ... $T(6) \geq 9$

Věta: Pro sudé n je $T(n) = \frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$, ale to nebudeme dokazovat toť je $K_{3,3}$

Dů: ① $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$... graf $K_{n/2, n/2}$ nemá Δ $\leftarrow$ Kaib je úplný bipartitní graf:

$$V = \{1-a, 1-b\}$$

$$E = \{ \{i, j\} \mid 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b \}$$

Obecně: G je bipartitní $\equiv$ vrcholy lze rozdělit na 2 části ("partity") tak, že uvnitř části nevedou hrany. $\leftarrow G[\text{partita}]$ nemá hrany

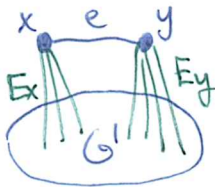
② $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ indukcí podle n

• $T(2) = 1 = \frac{2^2}{4}$

• $n \rightarrow n+2$: Necht' G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy

$\hookrightarrow$ zvolme hrany $e = \{x, y\} \in E$ libovolně:

kdyby řádění neexistovala, jistě je $0 \leq |E| \leq \frac{n^2}{4}$



$\rightarrow$ označme $G' = (V', E')$
 $G' := G[V']$
 kde $V' := V \setminus \{x, y\}$
 graf bez Δ s n vrcholy

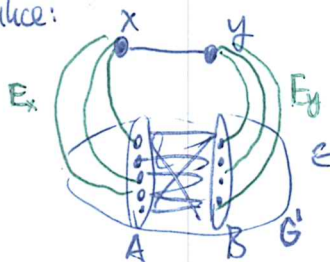
$\rightarrow$ podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

• x, y nemohou mít společného souseda $\Rightarrow |E_x| + |E_y| \leq n$

• $E' = E \setminus E_x \setminus E_y \cup \{e\} \Rightarrow |E'| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$ ▀

Dokonce: Věta*: Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran) jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2, n/2}$.

Dů: Podobná indukce:



$\leftarrow$ podle IP je to $\cong K_{n/2, n/2}$

$\Rightarrow A \cup \{y\}$ a $B \cup \{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}}$ ▀

☹️ x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ), BLÍŽE do A
 y takéž (ještě nevíme, zda do A nebo B)
 ... ale hran musí být n , aby vyšel celkový počet $\rightarrow x$ je spojen se všemi vrcholy z A , y se všemi z B (BLÍŽE)

x, y nemají společné sousedy v G'
 $\Rightarrow |E_x| + |E_y| \leq n$

G' nemá $\Delta \Rightarrow |E(G')| \leq T(n) = \frac{n^2}{4}$
 avšak aby se $|E(G)| = |E(G')| + |E_x| + |E_y| + 1$ napsalo na $T(n+2) = \frac{(n+2)^2}{4}$, musí být $|E_x| + |E_y| = n$ & $|E(G')| = T(n)$

proto zde mohou použít IP

Úloha: Chceme ze souvislého grafu odstranit co nejvíce hran, aniž bychom porušili souvislost $\Rightarrow$ hledáme minimální souvislý podgraf se stejnou množinou vrcholů.

takovým grafem se říká stromy $\left[\begin{array}{l} \text{souvislý \& smazáním libovolné hrany} \\ \text{se stane nesouvislým} \end{array} \right.$ tomu se říká kostka grafu
[žijeme existuje - lze ji ziskat opak. mazáním hran]
(uvědomme, že všechny kostky mají stejný #hran)
bez kružnic

Lemma: Graf T je strom $\Leftrightarrow T$ je souvislý a acyklický.

Důk: Stačí pro T souvislý dokázat: T je min. souvislý $\Leftrightarrow T$ je acyklický
tj. T není min. souvislý $\Leftrightarrow T$ je cyklický.

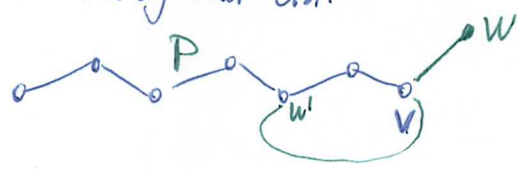
$\Leftarrow$ pokud T obsahuje cyklus, smazání hran na cyklu neporuší souvislost
 $\Rightarrow$ pokud smazání hrany $e = \{x, y\}$ neporuší souvislost, pak v T existuje cesta mezi x, y ... přidáme-li e zpět, máme cyklus v T .

Df: Les je acyklický graf To jsou grafy, jejichž komponenty jsou stromy.

Df: List je vrchol stupně 1. $\leftarrow$ o listech uvažujeme i v grafech, které nejsou lesy

Lemma: Každý strom s aspoň 2 vrcholy má list.

Důk: Uvažme nejdelší cestu:



kdyby v nebyl list, vedle něj další hrana. kam?

[důkaz jsme našli 2 listy]

$\swarrow$ na P máme cyklus $\searrow$ mimo P P lze prodloužit

Lemma: Necht' G je graf a v jeho list.

Pak G je strom $\Leftrightarrow G-v$ je strom.

v důkaz používáme strom $\Leftrightarrow$ souvislý acyklický

Důk: $\Rightarrow G-v$ je podgrafem acyklického grafu $G \Rightarrow$ je také acyklický

libovolné vrcholy $x, y \neq v$ jsou v G spojené cestou, která neobsahuje v ($\deg(v)=1$), takže tato cesta existuje i v $G-v$. Proto $G-v$ je souvislý.

$\Leftarrow G$ je acyklický: případná kružnice by neobsahovala $v \Rightarrow$ byla by i v $G-v$

G je souvislý: kdyby nebyl, měl aspoň 2 komponenty $\Rightarrow \exists$ komponenta bez v , ta musí být i komponentou $G-v$.

Věta: Strom s n vrcholy má $n-1$ hran.

Důk: Indukcí podle n ...

• pro $n=1$ triv. platí • $n \rightarrow n+1$... necht' T je strom s $n+1$ vrcholy, $l :=$ jeho nějaký list
 $T' := T - l$ je strom s n vrcholy $\Rightarrow$ má $n-1$ hran
 T má o 1 hranu více, tedy n .

Věta: Souvislý graf na n vrcholech s $n-1$ hranami je strom.

Dů: Chceme provést podobnou indukci, ale kde vzít list? V kroku $n \rightarrow n+1$: Máme libovolný graf G s $n+1$ vrcholy a n hranami (souvislý).

Trvzení: G má alespoň 1 list.

Dů: $|E| = n \Rightarrow \sum \deg(v) = 2n \Rightarrow$ průměrný stupeň < 2

Proto $\exists l: \deg(l) < 2 \dots$ ale graf je souvislý, takže $\deg(l)$ nemůže být 0. [zde využíváme toho, že $n+1 \geq 2$]

Nyní $G' = G - l \dots$ stále souvislý, n vrcholy, $n-1$ hran $\xrightarrow{IP} G'$ je strom $\xrightarrow{\text{lemma}} G$ je strom. 

Věta: Následující vlastnosti grafu G jsou ekvivalentní:

- ① souvislý & acyklický
- ② minimální souvislý - souvislý, ale po odebrání lib. hrany už nebude
- ③ maximální acyklický - acyklický, ale po přidání lib. hrany už nebude
- ④ souvislý & $|E| = |V| - 1$
- ⑤ acyklický & $|E| = |V| - 1$ "Eulerova formule"
- ⑥ jednoznačně souvislý - $\forall u, v \in V(G) \exists$ právě 1 cesta mezi u, v

Dů: Uvime už ① $\Leftrightarrow$ ② $\Leftrightarrow$ ④, ostatní necháme jako cvičení.

Důsledky pro kostky:

Všechny kostky grafu mají stejný # hran

$\downarrow$
je jedno, jestli vložíme minimální souvislý podgraf vzhledem k # hran nebo k inkluzi.

Úloha: Kolik existuje stromů s $V = \{1 \dots n\}$? (neboli kolik koster má graf K_n ?)
 $\hookrightarrow$ označme S_n

Věta (Cayleyho formule): $S_n = n^{n-2}$.

Dů: Budeme dvěma způsoby počítat polykody: uspořádané trojice (T, r, c)

↑
Postup výstavby
kořenového stromu

↑
strom na vrcholech $\{1 \dots n\}$
↑
kořen $r \in V(T)$
↑
odstředivá hrana: bijekce $[n-1] \rightarrow E(T)$

Nechť $P_n := \# \text{polykodů s } n \text{ vrcholy.}$

Pak jistě $P_n = S_n \cdot n \cdot (n-1)!$

↑ ↑ ↑
volby T volby r volby c

Jiným způsobem: postupně přidáváme hrany podle c a vytrávíme strom T .

- T si představíme zorientovaný směrem ke kořeni.
- kořen je jediný s $\deg_{\text{out}}(-) = 0$, ostatní vrcholy mají $\deg_{\text{out}}(-) = 1$.
- v průběhu stavby máme nějaký podgraf: les stromů orientovaných k jejich kořenům.
- každá další hrana musí vést z nějakého kořene do libovolného vrcholu jiného stromu
- pokračé spojíme 2 stromy $\Rightarrow$ v k -tém kroku máme $n-k+1$ stromů.

- # možností v k-tém kroku: $n \cdot (n-k)$
 $\uparrow$ cílový vrchol $\uparrow$ kořen jiného stromu

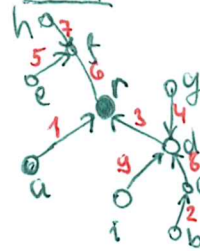
- vynásobením přes všech $n-1$ kroků:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} n \cdot (n-k) = n^{n-1} \cdot (n-1)!$$

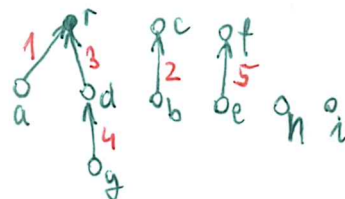
Z toho: $S_n \cdot n \cdot (n-1)! = n^{n-1} \cdot (n-1)!$

tedy: $S_n = n^{n-2}$

Příklad:



před přidáním 6. hrany:



RELACE (zejména binární)

Připomenutí: uspořádané dvojice (x,y)

Kartézský součin $X \times Y := \{(x,y) \mid x \in X, y \in Y\}$

☹ Co udělá $X \times Y \times Z$? Pozor: $(X \times Y) \times Z$ produkuje $((x,y), z)$
 ale $X \times (Y \times Z)$ dává $(x, (y,z))$

Konvence: oba považujeme za alternativní zápisy uspoř. trojice

Df: (Binární) relace mezi množinami A a B je podmnožina kartézského součinu $A \times B$.

Df: Relace na množině $A \equiv$ relace mezi A a A .

Představa: Je to nějaký vztah mezi prvky A a B

... skříňka, do které vložíme $a \in A$ a $b \in B$ a ona odpoví Ano/Ne.

talíře $\times$ míčky
 považovat za asociativní
 $\downarrow$
 v definici kartézské
 mocniny $X^n = X \times X \times \dots \times X$
 nemusíme uvažovat
 o uzavřetosti

Příklady na množině $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

① rovnost $\{(1,1), (2,2), \dots, (5,5)\}$

	1	2	3	4	5
1	■				
2		■			
3			■		
4				■	
5					■

" $a=b$ "
 je vlastně zkratka
 za $(a,b) \in$

→ obecně identická relace

$$id_A := \{(a,a) \mid a \in A\}$$

zvaná též diagonální relace A .

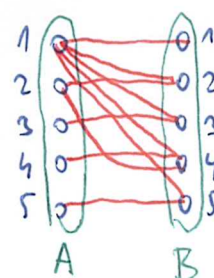
② dělitelnost

	1	2	3	4	5
1	■				
2	■	■			
3			■		
4		■		■	
5					■

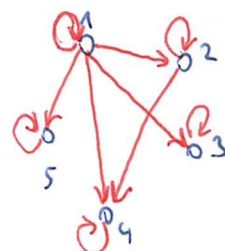
$\{(1,1), \dots, (1,5),$
 $(2,2), (2,4),$
 $(3,3),$
 $(4,4),$
 $(5,5)\}$

Jiné způsoby kreslení:

a) bipartitní graf



b) orientovaný graf
 pro relace na A



③ $x \leq y$

	1	2	3	4	5
1	■	■	■	■	■
2	■	■			
3			■		
4		■		■	
5					■

④ prázdná relace

$\emptyset$

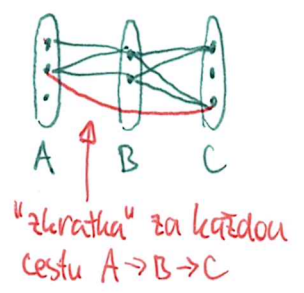
(graf bez hran)

⑤ univerzální relace

$A \times B$ (něco jako úplný graf)

Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B , pak $R^{-1} := \{(b, a) \mid (a, b) \in R\}$ je relace mezi B, A . } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

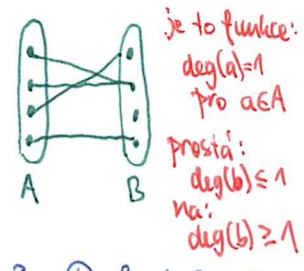
Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C , pak $R \circ S := \{(a, c) \mid a \in A, c \in C: \exists b \in B: aRb \& bSc\}$



☺ $R \circ id_B = R, id_A \circ R = R$

Df: Funkce z A do B je relace f mezi A a B t.ž. $\forall a \in A \exists ! b \in B: a f b$. } značíme $f: A \rightarrow B$
 ☺ id_A je identické zobrazení $f(x) := y$ t.ž. $x f y$ (jednoznačně určeno)

- Df: $f: A \rightarrow B$ je
- prostá $\equiv \forall a, a' \in A: f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$ (injektivní)
 - na (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \exists a \in A: f(a) = b$
 - vzájemně jednoznačná (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



- Příklady: ① $\sin: \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ (nebo $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$) ② $\text{sgn}: \mathbb{R} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$ (pro $x < 0$ pro $x > 0$) ③ $\text{card}: 2^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ (mohutnost množiny (kardinalita)) ④ $f: A \times B \rightarrow C$ (funkce dvou proměnných)

☺ Je-li $f: A \rightarrow B, g: B \rightarrow C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C , kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
 ☺ nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

☺ Pro $f: A \rightarrow B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow f$ je bijekce

Df: Relace R na množině A je: Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

- reflexivní $\equiv \forall a \in A: aRa \leftarrow id_A \subseteq R$
- symetrická $\equiv \forall a, b \in A: aRb \Rightarrow bRa \leftarrow R = R^{-1}$
- transitivní $\equiv \forall a, b, c \in A: aRb \& bRc \Rightarrow aRc \leftarrow R \circ R \subseteq R$ příklady: $x < y, x = y$
- antisymetrická $\equiv \forall a, b \in A: aRb \& bRa \Rightarrow a = b \leftarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je ekvivalence $\equiv$ je reflexivní & symetrická & transitivní.
 Značení: často $\equiv, \approx, \sim, \cong$ apod. "různá rovnítká"

- Příklady:
- ① rovnost na $\mathbb{N}$
 - ② rovnost modulo n
 - ③ geometrická shodnost
 - ④ geom. podobnost
 - ⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\text{card}(X) = \text{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \rightarrow Y$)
 - ⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
 $\uparrow$ relace na $V, xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
 - ⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
 $\uparrow xRy \equiv \exists$ cesta $x \rightarrow y$ & $\exists$ cesta $y \rightarrow x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid aRx\}$

nebo $xRa \dots$ to je díky symetrii totéž

☹️ $\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

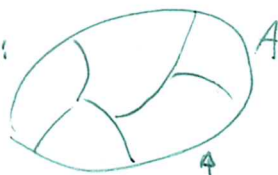
Nechť R je ekvivalence na množině A .

Věta: ① $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.

② $\forall x, y \in A$: buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.

③ $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R .

Představa:



↑ ekv. třídy

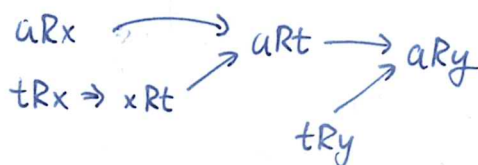
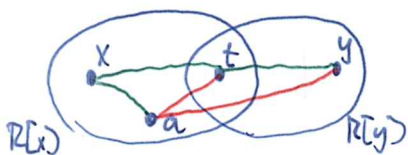
Dů: ① triviální díky $x \in R[x]$

② ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$... prohozením x, y získáme $R[y] \subseteq R[x]$ a záměnou získáme inkluzi rovnost.

Nechť $t \in R[x] \cap R[y]$ a $a \in R[x]$. Ukážeme, že $a \in R[y]$.

$\underbrace{t \in R[x]}_{tRx} \ \& \ \underbrace{t \in R[y]}_{tRy} \quad \text{tedy } aRx \quad \underbrace{a \in R[x]}_{aRx} \quad \underbrace{a \in R[y]}_{aRy}$

Obrázkem:



③ xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

☹️ Třídy pro naše příklady ekvivalenci: ② rovnost mod $n \rightarrow n$ zbytkových tříd

⑥ neorient. dosažitelnost $\rightarrow$ komponenty souvislosti

⑦ orient. $\rightarrow$ silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$ je rozděl množiny $X \equiv$

① $\forall A \in \mathcal{Y}: A \neq \emptyset$

② $\forall A, B \in \mathcal{Y}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

③ $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

ekv. třídy tvoří rozděl,
naopak ke každému rozděl
vytvoříme ekvivalenci
"být v téže třídě", tedy
 $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{Y}: \{a, b\} \subseteq A$

☹️ Pozor, někdy se více hodí rozděl dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozděl V.

Na úvahu: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence - nejsou tranzitivní.

Třeba na $\mathbb{R}$: $xBy \equiv |x-y| \leq 1$. Tehdy $1B2$ a $2B3$, ale $\neg 1B3$.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rovné)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání $\equiv$
 R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Často značíme
 $\leq, \leqslant, \sqsubseteq$ apod.

Df: Prvky $a, b \in A$ jsou porovnatelné $\equiv aRb$ nebo bRa .

Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Df: Částečné uspořádání množina (ČUM) je dvojice (A, R) , kde A je množina a R uspořádání na A .

Podobně: Ostře uspořádání $a < b \equiv a \leq b \text{ \& } a \neq b$ (25)
 $\hookrightarrow$ irreflexní ($\forall x \ x \not< x$), antisymetrické, tranzitivní

Příklady: ① $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární

② $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární

③ id_X Žádné 2 různé prvky nejsou porovnatelné

④ $(\mathbb{N}^+, \mid)$ - dělitelnost $2 \mid 4$, $4 \mid 12$, ale $4, 6$ neporovnatelné
 pozor! 1 na $\mathbb{Z}$ není uspoř., protože $-2 \nmid 2$ & $2 \nmid -2$

⑤ $(2^X, \subseteq)$ - inkluze množin pro $X = \{1, 2, 3\}$: $\{1\} \subseteq \{1, 3\}$, kdežto $\{1, 3\}, \{2, 3\}$ neporov.

⑥ lexikografické uspořádání: pro $(A, \leq)$ čum definujeme $\leq_{\text{Lex}}$ na A^* :

$$(x_1, x_2) \leq_{\text{Lex}} (y_1, y_2) \equiv x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \text{ \& } x_2 \leq y_2)$$

• na A^k : $(x_1 - x_k) \leq_{\text{Lex}} (y_1 - y_k) \equiv x_1 - x_k = y_1 - y_k \vee$
 $\exists i: 1 \leq i < k \text{ \& } x_1 = y_1 \text{ \& } \dots \text{ \& } x_{i-1} = y_{i-1} \text{ \& } x_i < y_i$

• na A^* (množina všech konečných posloupností prvků z A , tedy řetězců znaků z A):

$$(x_1 - x_n) \leq_{\text{Lex}} (y_1 - y_l) \text{ pro } n := \min(k, l) \text{ je}$$

$$(x_1 - x_n) <_{\text{Lex}} (y_1 - y_n) \vee$$

$$(x_1 - x_n) = (y_1 - y_n) \text{ \& } k \leq l$$

} $ab < abc < ac$

Zúrovnění: Hasseův diagram

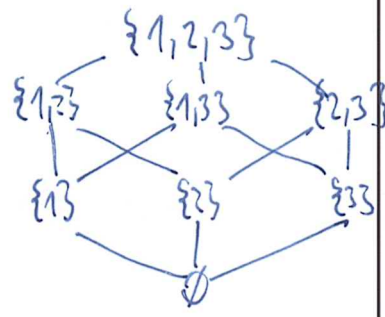
např. $\begin{matrix} 4 \\ | \\ 3 \\ | \\ 2 \\ | \\ 1 \\ | \\ 1 \end{matrix}$

co je nahore, je větší
 & hrany plynoucí
 z tranzitivity
 nekreslíme

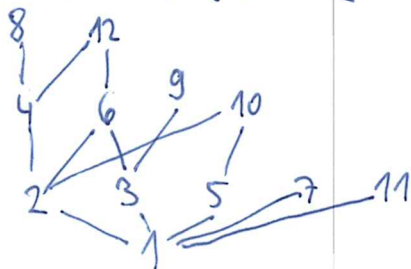
Df: Relace bezprostředního předchůdce
 pro čum $(X, \leq)$ je $\triangleleft$ na X t.j.

$$\forall x, y \in X: x \triangleleft y \equiv x < y \text{ \& } \nexists z \in X: x < z \text{ \& } z < y$$

• Pro $(2^{\{1, 2, 3\}}, \subseteq)$:



• Pro dělitelnost na $\{1 - 12\}$:



Df: Pro čum $(X, \leq)$ je prvek $x \in X$:

- nejmenší $\equiv \forall y \in X: x \leq y$ ☹️ existuje nejvýše jeden
- minimální $\equiv \nexists y \in X: y < x$
- podobně největší a maximální

Df: $A \subseteq X$ je:

- řetězec $\equiv \forall a, b \in A$ jsou porovnatelné
- antiřetězec $\equiv \forall a, b \in A, a \neq b$ jsou neporovnatelné

☹️ v lineárně uspoř. množině je nejmenší totéž co minimální,
 obecně nejmenší $\Rightarrow$ minimální, ale ne naopak.

☹️ množina všech
 min. prvků tvoří
 antiřetězec

Věta: Každá konečná neprázdná ČUM má aspoň 1 minimální prvek.

Důk #1: Necht' $(X, \leq)$ je ČUM.

Zvolme $x_1 \in X$ libovolně.

Pokud x_1 není min., existuje $x_2 < x_1$.

Pokud x_2 není min., existuje $x_3 < x_2$.

Atd. Přitom $x_1, x_2, \dots$ jsou navzájem různá: pokud $x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \dots > x_i$,

Ale posl. nemůže pokračovat do nekonečna, neboť X je konečná. Pak z tranzitivity $x_i > x_i$, což je ve sporu s irreflexivitou.

pro nekonečné řjeme neplatí - viz třeba $(\mathbb{Q}, \leq)$

Důk #2: Ke každému $x \in X$ přiřadíme $L_x := \{y \in X \mid y \leq x\}$, zřejmě $x \in L_x$.

Zvolme $a \in X$: $|L_a|$ je min.

Pokud $|L_a| = 1$, a je minimální prvek.

Pokud $|L_a| > 1$, vybereme $b \in L_a \setminus \{a\} \dots L_b \subseteq L_a \setminus \{a\}$ díky tranzitivitě a antisymetrii

to mu se říká dolní množina prvek x

$\Rightarrow |L_b| < |L_a|$, což je spor s min. $|L_a|$.

☞ $\leq^{-1}$ je také uspořádání (opačné) - prohodili jsme min/max, nejv./nejm. atd.

Věta (o lineárním rozšíření): Pro každou $(X, \leq)$ ČUM $\exists$ lineární uspoř. na X t.j. $\leq \subseteq \leq'$.

konečnou

pro nekonečné je to složitější a potřebujeme axiom výběru

Důk: Indukcí podle $n := |X|$.

Pro $n=0$: stačí zvolit $\leq = \emptyset$.

$n \rightarrow n+1$: $(X, \leq)$ má nějaký minimální prvek $m \in X$.

Zvolíme $X' := X \setminus \{m\}$, $\leq' := \leq \cap X' \times X'$.

$(X', \leq')$ je ČUM s n prvky $\Rightarrow$ podle IP existuje lineární rozšíření $\leq'$.

Sestavíme $\leq := \leq' \cup \{(m, x) \mid x \in X\}$

a nahledneme, že $\leq$ je lin. uspoř. rozšiřující $\leq'$.



$\rightarrow$ ostré uspořádání je bez smyček

Grafový pohled - konečné neprázdné ČUM jsou acyklické orientované grafy se smyčkami,

kteřé jsou navíc tranzitivní $\equiv$ kdykoliv existuje cesta z x, y , pak (x, y) je hrana.

jediné porcení cykly

každá cesta má zkratku

Lineární rozšíření je tzv. topologické uspořádání $\leq$ na V t.j. $(x, y) \in E \Rightarrow x \leq y$.

"Srovnáme vrcholy na přímku tak, aby všechny hrany vedly zleva doprava."

Uspořádání

Ještě přidáme v analýze často používané:

Df. Pro $A \subseteq X$, kde $(X, \leq)$ je ČUM:

- $s \in X$ je horní záhora $A \equiv \forall a \in A: a \leq s$
- $s \in X$ je supremum $A \equiv s$ je nejmenší z horních záhor A .
- analogicky dolní záhora a infimum (největší dolní záhora)

☞ je jednoznačně určeno, existuje-li

např. v $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid)$ je $\sup \{a, b\}$ nejmenší společný násobek a $\inf \{a, b\}$ největší společný dělitel. (funguje i pro větší množiny)

Izomorfismus - "jedna struktura vypadá jako druhá" - potkali jsme pro grafy, teď pořádky a obecněji

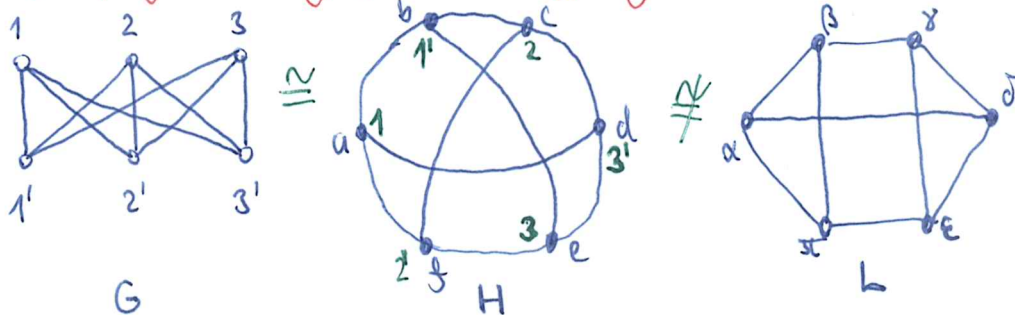
(27)

Df: Grafy $G=(V,E)$ a $G'=(V',E')$ jsou izomorfní (značíme $G \cong G'$) $\equiv$

$\exists f: V \rightarrow V'$ bijekce t.j. $\forall x,y \in V: \{x,y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. } + nazýváme izomorfismus mezi G a G'

☺ f říká, jak přejmenovat grafu G vrcholy, aby vznikl G' .

Příklad:



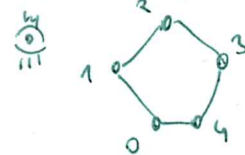
- $G \cong H$ sestrojením izomorfismu
- $G \not\cong K_5$: mají jiný # vrcholů
- $G \not\cong K_6$: mají jiné stupně
- $G \not\cong L$: G je bipartitní, L má Δ

obecně: izomorfismus zachovává všechny vlastnosti, které nezáleží na jménech vrcholů

Pozn: Ověřit, jestli f je izomorfismus, je algoritmicky jednoduché, ale rozhodnout, zda nějaký existuje, je nejspíš těžké.

Df: automorfismus

je izomorfismus G s G .



má kromě identity 9 dalších automorfismů

- Podobně můžeme izomorfismus definovat pro orientované grafy:
 $f: V \rightarrow V'$ bijekce: $\forall x,y \in V: (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E'$.

- Nebo pro uspořádaní: $\text{CUM } (X, \leq) \cong (X', \leq') \equiv$
 $\exists f: X \rightarrow X'$ bijekce: $\forall x,y \in X: x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$.

$\hookrightarrow$ obecněji: $(X, R_1 - R_k) \cong (X', R'_1 - R'_k) \equiv \exists f: X \rightarrow X'$ bijekce

$\uparrow$ množina + k relací na ní
"relační systém"

kompatibilní s relacemi $R_1 - R_k$, tedy

$\forall i: \text{arity}(R_i) = \text{arity}(R'_i) =: a_i$

$\uparrow$ kolika-tice jsou v relaci

$\forall x_1 - x_{a_i} \in X$

$(x_1 - x_{a_i}) \in R_i \Leftrightarrow (f(x_1) - f(x_{a_i})) \in R'_i$.

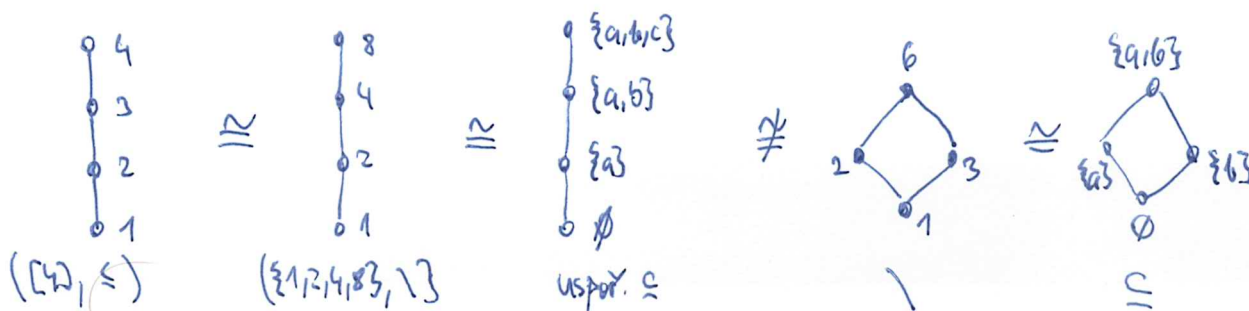
Například: $(\mathbb{R}, 0, +) \cong (0, \infty, 1, \cdot)$

$\uparrow$ konstanta je unární relace

$\uparrow + a \cdot$ jsou ternární relace

izomorfismus je $x \mapsto e^x$

zpět k izomorfismům uspořádaní:



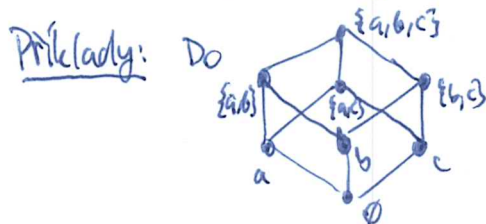
Nebo pro nekonečné čum:

Mezi $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ existují bijekce, ale:

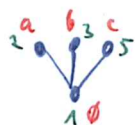
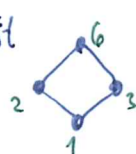
- $(\mathbb{N}^+, \leq) \cong (\mathbb{N}, \leq)$, zatímco
- $(\mathbb{N}, \leq) \not\cong (\mathbb{Z}, \leq)$ - jedna čum má nejmenší prvek, druhá ne
- $(\mathbb{Z}, \leq) \not\cong (\mathbb{Q}, \leq)$ - uspoř. na $\mathbb{Q}$ je husté ($\forall x, y, x < y \Rightarrow \exists z: x < z < y$), zatímco na $\mathbb{Z}$ nikoliv

☺ "Každé uspořádání lze najít někde uvnitř inkluze."

Df. Vnoření $(X, \leq)$ do $(X', \leq')$ je $f: X \rightarrow X'$ prosté t.č. $\forall x, y \in X: x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$. } vlastně izomorfismus X s nějakou indukovanou podstrukturou v X'



(že mohli dělitelnost)



1=∅ 2=a 3=b 6=abc
ale i 1=∅ 2=ab 3=bc 6=abc

Věta (o vložení do inkluze): Pro každou $(X, \leq)$ čum existuje vnoření do $(2^X, \subseteq)$.
i nekonečnou

Dů: Stačí zvolit $f(x) := L_x = \{y \in X \mid y \leq x\}$ (dolní množiny - už známe)

① f je prosté: pokud $L_x = L_y$, pak z $x \in L_x, y \in L_y$ plyne $x \in L_y$ a $y \in L_x$, tedy $x \leq y$ a $y \leq x$, což dá transitivitou $x = y$.

② $x \leq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$: pokud $a \in L_x$, pak $a \leq x$ a z transitivity $a \leq y$, tedy $a \in L_y$.

③ $f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow x \leq y$: $x \in L_x \Rightarrow x \in L_y \Rightarrow x \leq y$.

Vraťme se ještě k řetězcům a antirětězcům: jak dlouhé mohou být?

Df. Pro konечnou čum $P = (X, \leq)$ je:

- $\alpha(P) := \{ |A| \mid A \subseteq X \text{ je antirězec} \}$ - "šířka"
- $w(P) := \{ |R| \mid R \subseteq X \text{ je řetězec} \}$ - "výška"

pro "krychličku" z minulých příkladů je $\alpha = 3$
 $w = 4$

Věta (o Dlouhém a Širokém): Pro každou konečnou čum $P = (X, \leq)$ je $\alpha(P) \cdot w(P) \geq |X|$.

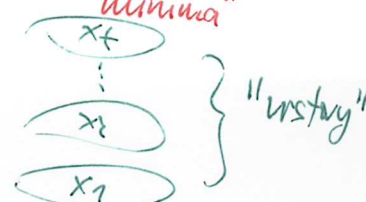
Dů: Sestrojíme: $X_1 := \text{minimální prvky}(X, \leq)$, $X'_1 := X \setminus X_1$

$X_2 := \text{min. prvky}(X'_1, \leq_1)$, $X'_2 := X'_1 \setminus X_2$

$\vdots$ $\leq$ omezené na X'_1

X_t takové, že $X'_t = \emptyset$

"postupně ukládáme minima"



① proces skončí: $|X'_i| > |X'_{i+1}|$, takže prvky časem dojdou

② $X_1 - X_t$ tvoří rozklad množiny X .

③ každá X_i je antiretězec $\Rightarrow \forall i |X_i| \leq \alpha(P)$

④ existuje řetězec délky $t \Rightarrow t \leq \omega(P)$

↳ proc: zvolme $a_t \in X_t$ libovolně

$a_t \notin X_{t-1}$, proto musí existovat $a_{t-1} \in X_{t-1}$ t.j. $a_{t-1} < a_t$.

$a_{t-1} \notin X_{t-2} \Rightarrow \exists a_{t-2} \in X_{t-2}$ t.j. $a_{t-2} < a_{t-1}$

atd. až do $a_1 \in X_1$.

$\{a_1, \dots, a_t\}$ tvoří řetězec.

z ③-④ plyne: $|X| = \sum_i |X_i| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$, což je tvrzení věty.

Aplikace: Věta (Erdős-Szekeres): Posloupnost čísel délky n^2+1 obsahuje monotónní podposloupnost délky $n+1$.

už jsme zmínili
na začátku
semestru

neostře, tedy nerostoucí
nebo neklesající

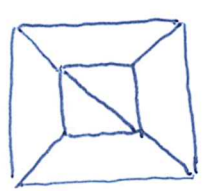
Důk: Mějme $x_1, \dots, x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$.

Na $[n^2+1]$ zvolme relaci $\prec$: $i \prec j \equiv i < j \ \& \ x_i \leq x_j$

① $\prec$ je uspořádání.

② řetězec odpovídá neklesající pp., antiretězec nerostoucí pp.
Stačí aplikovat D&S.

KRESLENÍ GRAFŮ DO ROVINY



definujeme
neformálně,
nemajíce zatím
vybudovanou
analýzu a topologii

- vrcholy $\rightarrow$ body v rovině
- hrany $\rightarrow$ oblouky - spojitě křivky, které samy sebe neprotínají
↳ formálně: spojitá funkce $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ prostá
- "hrany se nekrčí"
- pokud vrchol leží na hraně, je její koncový vrchol
- pokud mají 2 hrany společný bod, je to jejich společný koncový vrchol



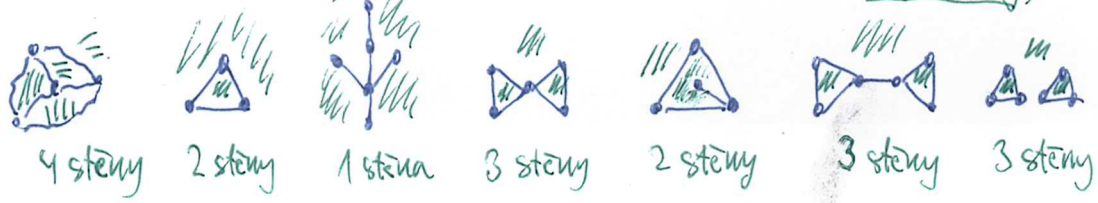
↳ rovinné nakreslení grafu $\rightarrow$ Df: Graf je rovinný $\equiv$ má aspoň 1 rovinné nakreslení.

↙ někdy též "graf nakreslený do roviny"

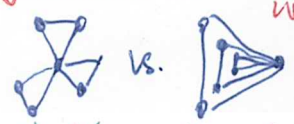
Df: Topologický rovinný graf $\equiv$ graf spolu s rovinným nakreslením

😊 Nakreslení cesty je oblouk, nakreslení cyklu uzavřená křivka $\leftarrow$ topologická kreslenice

Df: Stěny nakreslení $\equiv$ oblasti, na něž dělí rovinu sjednocení nakreslení hran (včetně vnější stěny) (jako oblouk, ale $f(i)-f(i)$)



g-úhel.stern ... zde žádný není



struktura stěn závisí na nakreslení

👁 Nakreslení stromu má vždy 1 stěnu.

Nakreslení lesa také.

Nakres. ostatních grafů má aspoň 2 stěny — (Topolog.) kružnice dělí rovinu na 2 části: vnitřek a vnějšek.

Jordanova věta o kružnici

Tvrzení: V souvislém topolog. grafu je hranice každé stěny nakreslením nějakého uzavřeného sledu.

👁 K_5 není rovinný. Cyklus 1,2,3 je nakreslen jako topolog. kružnice.



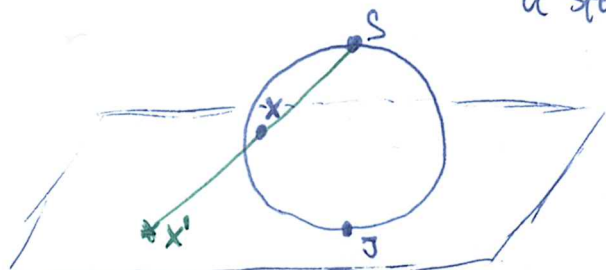
Bůho 4 je uvnitř.

At' už nakreslíme 5 do libovolné stěny, 1 hrana nepůjde nakreslit.

Kreslení na sféru

Věta: G lze nakreslit na sféru $\Leftrightarrow G$ je rovinný.

Dů: Stereografická projekce — spojitá bijekce mezi rovinou a sférou bez 1 bodu



oblast zobrazí na oblouk,
nakreslení na nakreslení;
stěna na stěnu,
vnější stěna na stěnu obsahující S

Důsledek: Můžeme si v rov. nakres. zvolit, která stěna je vnější.

↳ promítneme z roviny na sféru, pak sféru otočíme a promítneme zpět.

Kreslení na další plochy:

válcová plocha — stejně jako rovina

torus ("pneumatika") — jde nakreslit K_5

(a neplatí analogie Jordanovy věty!)

Möbiova páska — dokonce jde K_6

Věta (Eulerova formule):

Je-li G souvislý graf nakreslený do roviny
a $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$, $f = \#$ hran nakreslení,
pak $v + f = e + 2$.

Zafixujeme v , pak
Dů: Indukcí podle e :

① Min. souvislý graf je strom, má $e = v - 1$ a $f = 1$: $v + 1 = v - 1 + 2$ ✓

② Indukční krok $n \rightarrow n+1$: G na $n+1$ vrcholech není strom $\Rightarrow \exists$ hrana na cyklu.

$$G' := G - h \text{ má } v' = v, e' = e - 1, f' = f - 1 \stackrel{IP}{\Rightarrow} v' + f' = e' + 2 \\ v + f - 1 = e - 1 + 2 \\ \Rightarrow v + f = e + 2.$$

Důsledek: Všechna nakreslení téhož grafu mají stejný #stěn.

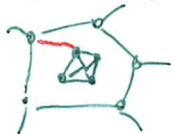
Df: G je maximální rovinný $\equiv G$ je rovinný & $\nexists e \in (V(G)) \setminus E(G)$:
 $G+e$ není rovinný.

(31)

Věta: V nakreslení max. rovinného grafu s aspoň 3 vrcholy jsou hranice všech stěn trojúhelníky. $\leftarrow$ takovým grafem se říká rovinne triangulace.

Dk: Necht' G je max. rovinný s nakreslením.

① G je souvislý: jinak lze

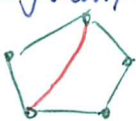


nakreslení 1 komponenty vložíme dovnitř stěny jiné komponenty a pak můžeme přidat hranu $\Rightarrow G$ nebyl max. $\downarrow$

$\uparrow$ pokud jsou všechny komponenty bez vnitřních stěn, graf je les $\Rightarrow$ spojíme do stromu, ten je stále rovinný

② Pokud je stěna ohraničena cyklem, je to Δ :

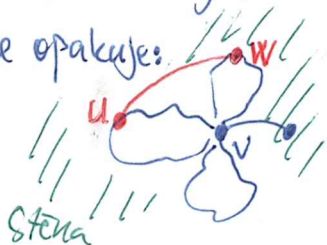
Kdyby to byl C_n pro $n \geq 4$:



můžeme přidat úhlopříčku $\downarrow$
 (některé dvojice vrcholů mohou být již spojeny vně, ale ne všechny)

③ Pokud je stěna ohraničena uzavřeným sledem, co není hranice:

Najdeme vrchol v , který se opakuje:



Odebráním v vznikne víc komponent $\Rightarrow$ vyberu u, w z různých komp. a spojuji hranou $\downarrow$

Lemma: V rovinne triangulaci platí $e = 3v - 6$.

Dk: Dosazením do Eulerovy formule:
$$\left. \begin{array}{l} v + f = e + 2 \\ 3f = 2e \end{array} \right\} \begin{array}{l} v + \frac{2}{3}e = e + 2 \\ v - 2 = \frac{1}{3}e \\ 3v - 6 = e \end{array}$$

Věta: Necht' G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholy. Potom $e \leq 3v - 6$. $\left. \begin{array}{l} \text{opět} \\ v \geq |V(G)|, \\ e \leq |E(G)|. \end{array} \right\}$

Dk: Přidáváme do G hrany, až vznikne max. rovinný $G' \supseteq G$.

Nakreslení G' je triangulace s $3v - 6$ hranami.

$|E(G)| \leq |E(G')|$, tedy $e \leq 3v - 6$.

Důsledek: K_5 není rovinný: $v=5, e=\binom{5}{2}=10$, ale $3v-6=9$.

Důsledek: V rovinném grafu je průměrný stupeň vrcholu < 6 :

$$\frac{\sum_{u \in V(G)} \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{2(3v-6)}{v} = \frac{6v-12}{v} = 6 - \frac{12}{v} < 6.$$

$\left. \begin{array}{l} \text{případy} \\ v < 3 \\ \text{ověříme} \\ \text{zvlášť} \end{array} \right\}$

Důsledek: V rovinném grafu existuje vrchol stupně max. 5.

Rovinné grafy bez Δ pro $v \geq 3$

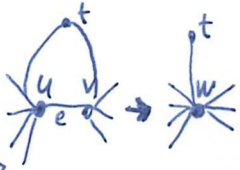
(32)

Maximální grafy: stěny jsou C_4, C_5 , případně celý graf je  (hvězda s alespoň 2 cípy)
 z Eulerovy formule:
$$\left. \begin{aligned} 4f &\leq 2e \\ f &\leq \frac{1}{2}e \end{aligned} \right\} \begin{aligned} v + \frac{1}{2}e &\leq e + 2 \\ v - 2 &\leq \frac{1}{2}e \end{aligned} \rightarrow \boxed{e \leq 2v - 4}$$
 ← platí také

- Proto:
- ① průměrný stupeň < 4
 - ② existuje vrchol stupně max. 3
 - ③ $K_{3,3}$ není rovinný: $v=6, e=9$, ale $2v-4=8$.

Operace zachovávající rovinnost

Dělení hrany: $G \oslash e$ 
 $V(G \oslash e) := V(G) \cup \{w\}$
 $E(G \oslash e) := E(G) \setminus \{e\} \cup \{e_1, e_2\}$
↓
dělení
K5 ani K3,3
nemůže být rovinné

Kontrakce hrany $G \cdot e$ 
 $V(G \cdot e) := V(G) \setminus \{u, v\} \cup \{w\}$
 $E(G \cdot e) := (E(G) \cap (V(G) \setminus \{u, v\})) \cup \{x, w\} \mid \{x, u\} \in E(G) \vee \{x, v\} \in E(G)\}$
nebo: $U \setminus \{u, v\} \cup \{w\} \mid e \in E(G), |e \cap \{u, v\}| = 1$
↑ lze ho získat opakováním dělení hran z...

Věta (Kuratowského): G není rovinný $\Leftrightarrow G$ má podgraf izomorfní dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

(zatím bez důkazu)

Poznámka: Dokonce platí G je rovinný $\Leftrightarrow G$ má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow G$ má nakreslení úsečkami.

Problém 4 barev (1852): Politickou mapu jde obarvit 4 barvami tak, aby žádné 2 sousední státy neměly stejnou barvu.
↑ nemulová délka Společné hranice (tj. ne bod)

→ barvíme stěny topologického rovinného grafu tak, aby stěny sousedící hranou neměly stejnou barvu

→ převedeme na barvení vrcholů (spojeny hranou $\Rightarrow$ různé barvy)

Df: Duální graf G^* k topolog. rov. grafu G :

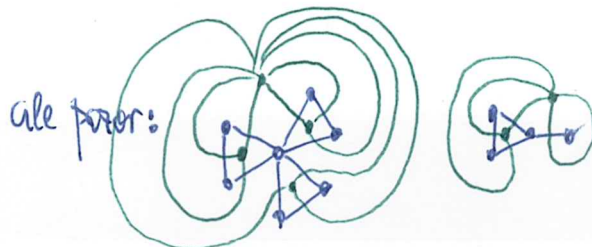
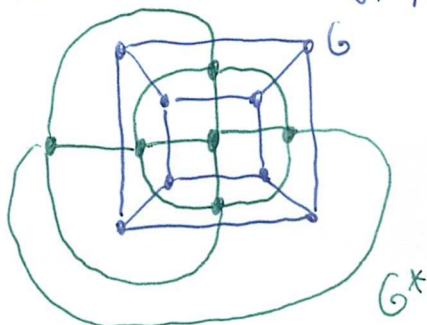
$V(G^*) :=$ stěny G

$\{f, g\} \in E(G^*) \Leftrightarrow$ stěny f, g sousedí v G hranou

→ přeměti: za každou hranu v G přidám hranu do G^* spojující stěny oddělené hranou

 G^* je také rovinný, prohodí se stěny $\leftrightarrow$ vrcholy, hrany se zachovají

Eulerova formule je symetrická vůči $v \leftrightarrow f$



Duál je obecně multigraf se smyčkami a násobnými hranami

Df: Obarvení grafu $G=(V,E)$ k barvami je funkce $c: V \rightarrow [k]$

t.č. $\{x,y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$.

Df: Graf je k -obarvitelný $\equiv \exists c$ obarvení k barvami.] každý graf je $|V|$ -obarvitelný

Df: Barevnost (chromatické číslo) $\chi(G) := \min \{k \mid G \text{ je } k\text{-obarvitelný}\}$ $\left. \begin{array}{l} \text{triv.} \\ \chi \leq |V| \end{array} \right\}$

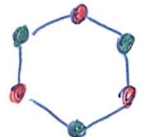
Příklady: • E_n (graf s n izolovanými vrcholy) má $\chi=1$, ostatní grafy mají $\chi \geq 2$

• K_n (úplný graf na n vrcholech) má $\chi=n$.

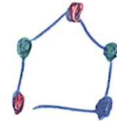
• P_n (cesta s n hranami): $\chi \leq 2$ 

• C_n (kružnice)

pro sudé n
 $\chi=2$



pro liché n
 $\chi=3$



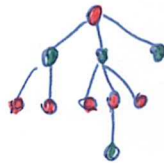
• Pokud graf obsahuje lichý cyklus, má $\chi \geq 3$

= obecně: pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \leq \chi(G)$

= proto $\chi(G) \geq \alpha(G)$, kde $\alpha(G)$ je klíkovost grafu:

max. k t.č. G má podgraf izomorfní s K_k .

• Stromy mají $\chi \leq 2$:



Zvolíme kořen, barvíme podle vzdálenosti od kořene mod 2 ("po patrech")

Lemma: Graf G je bipartitní $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 2$. (partity odpovídají barvám)

Věta: G je bipartitní $\Leftrightarrow G$ neobsahuje lichou kružnici.

Dk: $\Rightarrow$ už víme

$\Leftarrow$ Stačí dokázat pro souvislý G , jinak barvíme po komponentách.

Zvolíme $T :=$ kostra grafu G , $c :=$ 2-obarvení T .

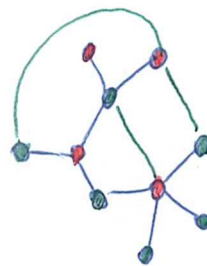
Ukážeme, že c je 2-obarvení celého grafu.

Nechť $e = \{x,y\}$ je hrana $v \in E(G) \setminus E(T)$.

Vrcholy x,y jsou v T spojeny nějakou cestou P ,

na níž se střídají barvy. Kdyby bylo $c(x) = c(y)$,

pak má P sudý # hran $\Rightarrow P+e$ by byla lichá kružnice.



Myslenka: Barvení indukci - zkusíme pro stromy, indukce podle $n := |V|$.

① $n=1 \rightarrow$ triviálně 2-obarvitelné.

② $n \rightarrow n+1$: Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy, l jeho list, $T' := T - l$.

Podle IP $\exists c'$ 2-obarvení T' .

Rozšíříme na obarvení c celého T : $c(v) := c'(v)$ pro všechny $v \neq l$.

$c(l)$ je barva opačná k barvě souseda l .

Věta (o 6 barvách): Rovinné grafy jsou 6-obarvitelné.

Dk: Opět indukci podle $|V|$, odtrháváme vrchol stupně $\leq 5 \Rightarrow$ jeho sousedé zabírají max. 5 barev, takže aspoň 1 zbývá.

Věta: $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$, kde $\Delta(G) = \max_{v \in V(G)} \deg(v)$.

Dk: Opět indukci, odtrháváme libovolný vrchol.

Obecnější pohled: Sestrojíme lineární uspořádání na $V(G)$ t.j. z každého vrcholu vede max. k hran do menších vrcholů. Barvíme podle tohoto uspořádání a postačí nám $k+1$ barev.

Věta (o 4 barvách): Pro rovinný G je $\chi(G) \leq 4$.

Dk: Kežlch, ož 1976, rozbor případů na počítači + chytrá teorie.

Věta (o 5 barvách): ... $\chi(G) \leq 5$.

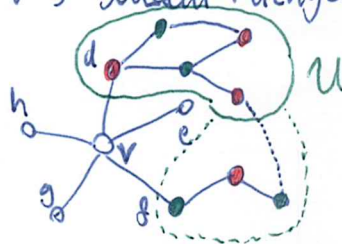
Dk #1: Opět indukce podle $n := |V|$.

① pro $n \leq 5$ dáme každému vrcholu jinou barvu.

② $n \rightarrow n+1$: vezmeme G rovinný s $n+1$ vrcholy, v stupně ≤ 5 , $G' := G - v$.

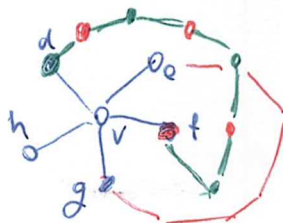
Podle IP existuje 5-obarvení c' grafu G' .

- pokud sousedé v mají v c' méně než 5 různých barev, zbývá volná barva pro v .
- jinak má v 5 sousedů různých barev, zvolíme nějaké nakreslení:



Nechť U je podgraf G' dosažitelný z d přes vrcholy barev $c'(d)$ a $c'(f)$.
tzn. *Kempeho řetězec*

- pokud $f \notin U$, stačí v U prohodit barvy
→ dostaneme jiné korektní obarvení, v němž se $c'(d)$ uvolní pro v .
- jinak uděláme totéž mezi e, g a už to musí být:



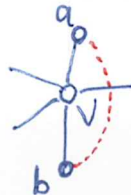
cesty by se musely překrývat,
to ale jde pouze ve vrcholech,
jinak by musel mít
2 barvy současně ↯

Dk #2: Stejná indukce, jen jinak řešíme situaci se sousedy 5 různých barev.

Nechť v je vrchol stupně 5 v G .

$\exists a, b$ sousedé v t.j. $\{a, b\} \notin E$.

↳ jinak by v grafu byla K_5



$G' := G - v + \{a, b\}$
rovinný

$G'' := G' - \{a, b\}$
rovinný
 $|V(G'')| < |V(G)|$

obarvení c' grafu G'
kde a, b mají stejné barvy
↓
IP → obarvení c'' grafu G''

Tím jsme uvolnili barvu pro v .

PLATÓNSKÁ TĚLESA

(35)

Platónská tělesa:
 • Trojrozměrné konvexní mnohostěny,
 stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky,
 ve všech vrcholech se potkávají stejný # hran.

Opíšeme mnohostěnu kouli,
 že středem promítáme na její povrch
 → graf nánášený na sféře

Co graf splňuje:

- v vrcholech, e hran, f stěn
- je k-regulární pro $3 \leq k \leq 5$

existence vrcholu
 určitého stupně

- stěny mají stejný stupeň s

dualita prohodí $v \leftrightarrow f, k \leftrightarrow s$, proto $3 \leq s \leq 5$

Proto: $e = \frac{kv}{2} = \frac{sf}{2}$, tedy $v = \frac{2e}{k}, f = \frac{2e}{s}$

princíp
 sudosti

totéž
 pro dualitu

Heed argument:
 $\frac{1}{k} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2}$ musí být kladné,
 neboť $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = 0$, takže
 aspoň 1 z k, s musí být rovno 3

Rozber případy:

① $k=5$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} > 0$

$\frac{1}{s} - \frac{5-2}{10} \dots$ pro $s=3$ máme $\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30}$

$e=30 \quad v = \frac{2e}{k} = \frac{60}{5} = 12$

$f = \frac{2e}{s} = \frac{60}{3} = 20$

20-stěn
 (ikosaedr)

② $k=4$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{4}$... opět lze jen $s=3$:

$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$

$e=12$

$v = \frac{24}{4} = 6$

$f = \frac{24}{3} = 8$

8-stěn
 (oktaedr)

③ $k=3$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{6}$

• $s=3$: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$

$e=6$

$v = \frac{12}{3} = 4$

$f = \frac{12}{3} = 4$

4-stěn
 (tetraedr)

• $s=4$: $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$

$e=12$

$v = \frac{24}{3} = 8$

$f = \frac{24}{4} = 6$

6-stěn (krychle)

• $s=5$: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$

$e=30$

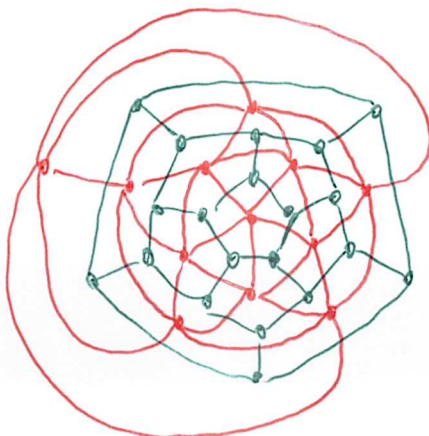
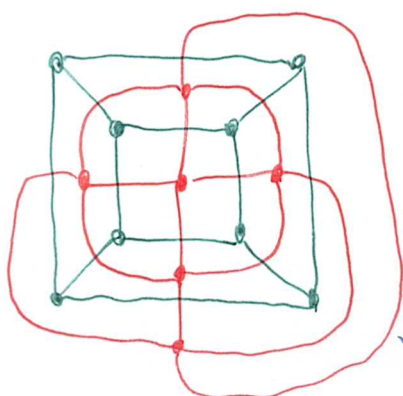
$v = \frac{60}{3} = 20$

$f = \frac{60}{5} = 12$

12-stěn (dodekaedr)

dualní
 sámi
 k sobě

dualita



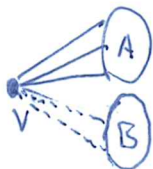
RAMSEYOVA TEORIE

36

Zpět k příkladu o 6 lidech v tramvaji z úvodní přednášky...

Věta: Každý graf na 6 vrcholech obsahuje buď trojúhelník nebo "antitrojúhelník"

Dk: Zvolíme $v \in V$ jakkoli, $A := \{w \in V \mid \{v, w\} \in E\}$,
 $B := \{w \in V \mid \{v, w\} \notin E, v \neq w\}$



$$|A| + |B| = 5 \Rightarrow |A| \geq 3 \vee |B| \geq 3$$

buď A obsahuje Δ ,
 nebo obsahuje hranu,
 kterou vrcholem v
 doplníme na Δ

buď B obsahuje Δ ,
 nebo anti-hranu,
 kterou vrcholem v
 doplníme na anti- Δ

3 vrcholy, mezi
 nimiž není žádná
 hrana

Zobecnujeme:

Df: Klika v grafu je podmnožina vrcholů,
 které jsou spojeny každý s každým.

} tedy podgraf izomorfní
 s K_k pro nějaké k

Df: Nezávislá množina (antiklika) je $B \subseteq V$
 taková, že mezi vrcholy v B nevedou hrany.

} indukovaný podgraf
 izomorfní s E_k pro nějaké k

Df: Doplněk grafu $G = (V, E)$ je graf $\bar{G} = (V, (E) \setminus E)$

↳ klika v $G \Leftrightarrow$ nezávislá množina v $\bar{G}$

Viz též klikovost $\kappa(G) := \max \{k \mid G \text{ obsahuje kliku o } k \text{ vrcholech}\}$

a nezávislost $\alpha(G) := \kappa(\bar{G})$ (tedy velikost největší nezávislé množiny)

Věta (Ramseyova o grafech): $\forall k \geq 1 \forall l \geq 1 \exists N$ t.č.

$\forall G$ graf s aspoň N vrcholy obsahuje kliku velikosti k
 nebo antikliku velikosti l .

} tedy
 $\alpha(G) \geq l$
 nebo $\kappa(G) \geq k$

Cesta k důkazu: $N(k, l)$ bude slibená hodnota N pro dané k, l .

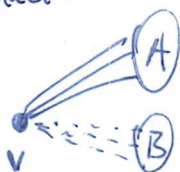
Víme $N(k, l) = N(l, k)$ díky doplněním

$$N(k, 1) = N(1, l) = 1$$

$$N(k, 2) = k$$

to nám také vyjde z indukce

Pokus o indukci:



Potřebujeme $|A| \geq N(k-1, l)$ nebo $|B| \geq N(k, l-1)$.

Jak velké N nám to vyjde?

$$\text{Stačí } N-1 \geq N(k-1, l) + N(k, l-1) - 1$$

⇒ Položením

$$N(k, l) := N(k-1, l) + N(k, l-1)$$

požadavek splníme.

↳ Podle toho indukujeme? Podle $k+l$.

Dáváme předněty do 2 přírůdků,
 chceme a v první nebo
 b v druhé

⇒ musí jich být celkem
 aspoň $(a-1) + (b-1) + 1$
 $= a + b - 1$

Tedy už víme, že $N(k,l)$ existuje ... co to ale je za čísla?

N	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6
3	1	3	6	10	15	
4	1	4	10	20		
5	1	5	15			
6	1	6				

← tohle je otočený
Pascalův Δ !

Twzení: $N(k,l) = \binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-2}{l-1}$ díky symetrii komb. čísel

$$N(1,l) = 1 = \binom{1+l-2}{0} \checkmark$$

$$N(k,l) = N(k-1,l) + N(k,l-1)$$

$$\binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1} \leftarrow \text{společná formule z Pascalova}$$

Důsledek: $N(k,l) \leq 2^{k+l-2}$... protože $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$, je každé $\binom{n}{k} \leq 2^n$

↳ Je potřeba tolik?

Df: Ramseyovo číslo $R(k,l) :=$ nejmenší N , pro něž věta platí pro dané k,l .

R	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5
3	1	3	6	9	14
4	1	4	9	18	25
5	1	5	14	25	43-46

} triviální případy $R(1,l)=1, R(2,l)=l$

5 nestačí: graf C_5

} známe přesně jen pár hodnot, je hodně těžké je spočítat

Zatím tedy víme: $R(k,l) \leq 2^{k+l-2}, R(k,k) \leq 2^{2k-2} \leq 4^k$
často značíme $R(k)$

Věta: $R(k,k) \geq 2^{k/2}$

→ To je nekonstruktivní důkaz, konstrukci grafů bez (anti)klik neumíme...

Důk: Použijeme pravděpodobnostní metodu: zvolíme nějaké n , vytvoříme náhodný graf na n vrcholech (pro každou dvojici vrcholů si nezávisle "hodíme minci", zda jsou spojeny hranou) a počítáme pravděpodobnost, že je v grafu klika nebo antiklika velikosti k . Pokud je $pr. < 1$, nutně existuje aspoň 1 graf bez (anti)kliky $\Rightarrow R(k,k) > n$.

Pro $U \in \binom{[n]}{k}$: $\text{Dev } A_U := \text{"} U \text{ indukce kliku"}$... $P(A_U) = 2^{-\binom{k}{2}}$

$\text{Dev } B_U := \text{"} U \text{ indukce antikliku"}$... $P(B_U) = 2^{-\binom{k}{2}}$

$\text{Dev } C_U := A_U \cup B_U$... $P(C_U) = P(A_U) + P(B_U) = 2^{1-\binom{k}{2}}$

$$P\left(\bigcup_U C_U\right) \leq \sum_U P(C_U) = \binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}}$$

v grafu existuje nějaká (anti)klika

Jakmile toto bude < 1 , máme vyhráno

Odhadujeme: $\binom{n}{k} = \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{k!} \leq \frac{n^k}{2^{k/2+1}}$

↑
příklad k=3

$1 - \frac{k(k-1)}{2} = 1 - \frac{k^2}{2} + \frac{k}{2}$

tedy: $\binom{n}{k} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} \leq \frac{n^k}{2^{k/2+1}} \cdot 2^{1-\binom{k}{2}} = \frac{n^k}{2^{k^2/2}} = \left(\frac{n}{2^{k/2}}\right)^k$

Tato horní mez je < 1 , kdykoli $n < 2^{k/2} \dots$ takže $R(k) \geq 2^{k/2}$.

Mimochodem: Horčíkova věta (2024): $\exists \epsilon > 0 : R(k, k) \leq (4 - \epsilon)^k \dots$ důkaz dost těžký
Dolní odhad umíme zlepšit jen o polynomiální faktor.

Vícebarevná verze: Barvíme hrany K_n t barvami, chceme jednobarevnou kopii K_k .
↳ pro $t=2$ dostaneme původní větu.

→ Věta: $\forall t \geq 1$ (počet barev)
(barevná Ramseyova) $\forall k \geq 1$ (velikost kliky)
 $\exists n$ (jak velký je "dost velký" graf ... Bůho má právě n vrcholů)
 $\forall c: \binom{[n]}{2} \rightarrow [t]$ (obarvení hran)
 $\exists A \subseteq \binom{[n]}{2}$ (vrcholy kliky)
t.č. c je konstantní na $\binom{A}{2}$ (kliky je jednobarevná)

→ příklad stačí n, jistě stačí i n+1 vrcholů

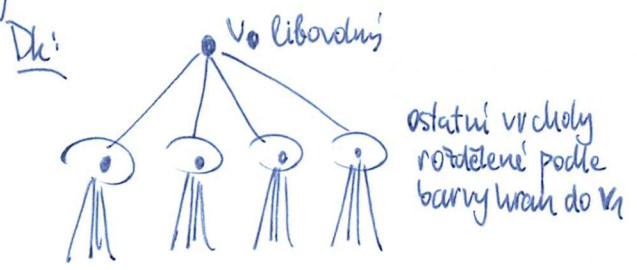
Překvapivě je jednodušší dokázat nekonečnou verzi...

Věta: $\forall t \geq 1 \quad \forall c: \binom{\mathbb{N}}{2} \rightarrow [t] \quad \exists A \subseteq \mathbb{N}$ nekonečná: c je konstantní na $\binom{A}{2}$.
barev obarvení úplného spočetného grafu nekonečná kliky je jednobarevná

Analogie: Věta (nekonečný princip holubníku): $\forall t \geq 1 \quad \forall c: \mathbb{N} \rightarrow [t] \quad \exists A \subseteq \mathbb{N}$ nekonečná
↑ řešení též Dirichletův nebo přihrádkový t.č. c je konstantní na A.

Dk: Mějme $A_1, \dots, A_t : A_i := \{x \in \mathbb{N} \mid c(x) = i\}$

Řekněme $\mathbb{N} = \bigcup_i A_i$, takže aspoň jedna A_i je nekonečná. } sjednocení konečné mnoha konečných množin by bylo konečné



Formálněji:
 $A_0 := \mathbb{N}$
pro $i=1, 2, \dots, t$

$v_i \in A_i$ zvolíme libovolně (treba min.)
 $B_i^j := \{w \in A_i \mid \forall v \in B_i^{j-1} (d(v, w) = j)\}$

$\{v_i, B_i^1, \dots, B_i^t\}$ tvoří rozklad A_i
⇒ aspoň jedna B_i^j je nekonečná,
tu prohlásíme za novou A_{i+1}
a barvu j za c_i



Takto definujeme A_i pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
všechny jsou nekonečné

staníme nekonečný strom,
v každém vrcholu stromu
jsme vybrali jeden vrchol př. grafu

Mezi v a jeho potomky vedou hrany stejné barvy
⇒ nekonečná cesta z kořene dolů indukce t barev. kliky.

2. v_i vedou do všech v_j , $j > i$ hrany barvy c_i .

V posloupnosti $c_1, c_2, \dots$ je jen konečně mnoho barev $\Rightarrow$ nějaká barva b se opakuje nekonečně-krát

(39)

Nechť $i_1 < i_2 < \dots$ jsou indexy t.č. $c_{i_1} = c_{i_2} = \dots = b$.

Tvrdíme, že $A = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \dots\}$ je hledaná klika.

Nechť $v_i, v_j \in A$, $i < j$. Potom $c(\{v_i, v_j\}) = c_i = b$ vždy tatáž barva. $\blacksquare$

Od nekonečné verze ke konečné.

Věta (konečný princip holubníku): $\forall t \geq 1 \exists n \forall c: [n] \rightarrow [t] \exists A \subseteq \binom{[n]}{t}: c \text{ konstantní na } A$.

Dů: Stačí zvolit $n := t(k-1) + 1$... často volíme jednodušeji $n := tk$.

De konečné barevné Ramseyovy věty:

- 1) Potřebujeme větev stromu (cestu z kořene dolů), na níž se nějaká barva vyskytne aspoň k -krát.
- 2) Podle principu holubníku stačí větev délky tk .
- 3) Ukážeme, že pro dost velké n musí strom obsahovat tak dlouhou větev. Pokud jako A_{t+1} volíme největší z B_i^j , bude:

$$|A_{t+1}| \geq \frac{|A_t| - 1}{t}$$

Chceme $|A_{t+k-1}| \geq 1$... to zajišťujeme splněním $\frac{|A_{t+k-2}| - 1}{t} \geq 1$, tedy $|A_{t+k-2}| \geq t+1$

z toho $|A_{t+k-3}| \geq t \cdot (t+1) + 1 = t^2 + t + 1$

Atd. až k $|A_0| = \sum_{i=0}^{t+k-1} t^i = \frac{t^{t+k} - 1}{t-1}$... takže stačí $|A_0| \geq t^{t+k}$... volíme $n := t^{t+k}$.

My jsme dokázali konečnou verzi úpravou důkazu nekonečné verze.

Dokonce platí, že nekonečná verze implikuje konečnou. Názvt důkaz:

Špatné obarvení $[n] :=$ nemá 1-barevnou kliku velikosti k

Negace konečné věty: existují libovolně velká n , pro něž existuje špatné obarvení $[n]$

$\hookrightarrow$ musí to nastat pro všechna n , protože zúžením špatného obarvení $[n]$ získáme špatné obarvení $[n-1]$

Ukážeme, že stupněm konečných špatných obarvení lze získat nekonečnou $\Rightarrow$ spor s nekonečnou verzí věty.

→ Staníme zakoreněný strom. Vrcholy na i -té hladině jsou špatná obarvení $[i]$.

Hrany odpovídají rozšíření obarvení.

Každá hladina obsahuje aspoň 1 vrchol $\Rightarrow$ strom má spočetně vrcholů

$\Rightarrow$ Existuje nekonečná větev

stále se rozšiřujících špatných obarvení (argument stejný jako v důkazu nekonečné věty)

$\Rightarrow$ Sjednocením ("limitou") těchto obarvení je špatné nekonečné obarvení. $\blacksquare$