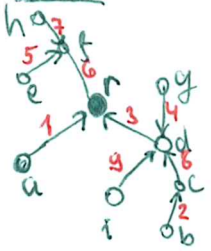
- # možností v k-tém kroku: $n \cdot (n-k)$
  - n: cílový vrchol
  - $(n-k)$: kořen jiného stromu
- vynásobením přes všech $n-1$ kroků:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} n\cdot(n-k) = n^{n-1}\cdot(n-1)!$$

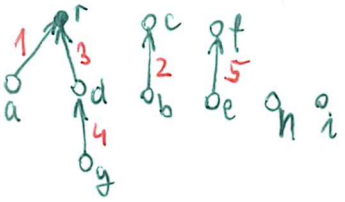
Z toho: $S_n \cdot n\cdot(n-1)! = n^{n-1}\cdot(n-1)!$

tedy: $S_n = n^{n-2}$.

Příklad:



Před přidáním 6. hrany:



RELACE (zejména binární)

Připomenutí: uspořádané dvojice (x,y)

kartézský součin $X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$

Co udělá $X\times Y\times Z$? Pozor: $(X\times Y)\times Z$ produkuje $((x,y),z)$

ale $X\times(Y\times Z)$ dává $(x,(y,z))$

Konvence: obojí považujeme za alternativní zápisy uspořádané trojice

} takže $\times$ určitě můžeme považovat za asociativní

↓

v definici kartézské mocniny $X^n = X\times X\times\dots\times X$ nemusíme uvažovat o uzávorkování

Def: (Binární) relace mezi množinami A a B je podmnožina kartézského součinu $A\times B$.

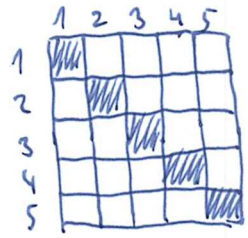
Def: Relace na množině A ≡ relace mezi A a A.

Představa: Je to nějaký vztah mezi prvky A a B

… skříňka, do které vložíme $a\in A$ a $b\in B$ a ona odpoví ANO/NE.

Příklady na množině $A = \{1,2,3,4,5\}$

① rovnost $\{(1,1),(2,2),\dots,(5,5)\}$



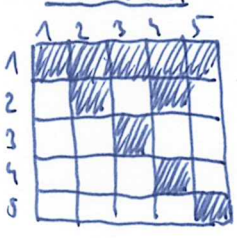
"$a=b$" je vlastně zkratka za $(a,b)\in =$

→ obecně identická relace

$id_A := \{(a,a) \mid a\in A\}$

zvaná též diagonální relace Δ_A.

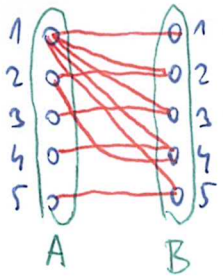
② dělitelnost



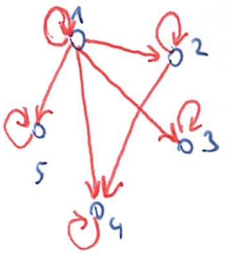
$\{(1,1),\dots,(1,5),$
$(2,2),(2,4),$
$(3,3),$
$(4,4),$
$(5,5)\}$

Jiné způsoby kreslení:

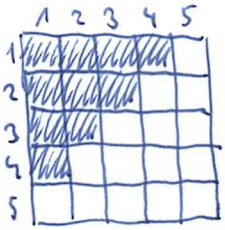
a) bipartitní graf



b) orientovaný graf pro relace na A (pozor, dovolujeme smyčky)



③ $x+y \le 5$

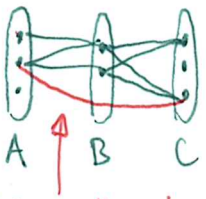


④ prázdná relace $\emptyset$ (graf bez hran)

⑤ univerzální relace $A\times B$ (něco jako úplný graf)

Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B, pak $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ je relace mezi B, A. } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C, pak $R \circ S := \{(a,c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B : aRb \,\&\, bSc\}$



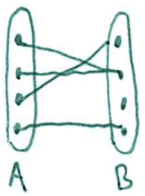
"zkratka" za každou cestu $A \to B \to C$

$R \circ id_B = R$, $id_A \circ R = R$

Df: Funkce neboli zobrazení z A do B je relace f mezi A a B t.ž. $\forall a \in A \; \exists! b \in B : a f b$. } značíme $f : A \to B$, $f(x) := y$ t.ž. xfy (jednoznačně určené)

id_A je identické zobrazení

Df: $f : A \to B$ je
- **prostá** (injektivní) $\equiv \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
- **na** (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$
- **vzájemně jednoznačná** (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



je to funkce: $\deg(a) = 1$ pro $a \in A$
prostá: $\deg(b) \leq 1$
na: $\deg(b) \geq 1$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (nebo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ② $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ (pro $x<0$, pro $x>0$) ③ $\mathrm{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mohutnost množiny (kardinalita) ④ $f : A \times B \to C$ funkce dvou proměnných

Je-li $f : A \to B$, $g : B \to C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

Pro $f : A \to B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow$ f je bijekce

---

Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

Df: Relace R na množině A je:
- **reflexivní** $\equiv \forall a \in A : aRa$ $\leftarrow$ $id_A \subseteq R$
- **symetrická** $\equiv \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ $\leftarrow$ $R = R^{-1}$
- **tranzitivní** $\equiv \forall a, b, c \in A : aRb \,\&\, bRc \Rightarrow aRc$ $\leftarrow$ $R \circ R \subseteq R$ příklady: $x<y$, $x=y$
- **antisymetrická** $\equiv \forall a, b \in A : aRb \,\&\, bRa \Rightarrow a = b$ $\leftarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je **ekvivalence** $\equiv$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní.

Značení: často $\equiv$, $\approx$, $\sim$, $\triangleq$ apod. "různá rovnítka"

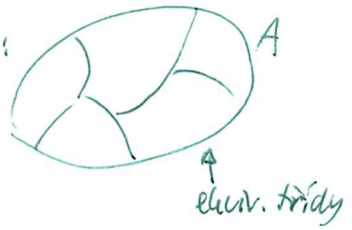
Příklady:
① rovnost na $\mathbb{N}$
② rovnost modulo n
③ geometrická shodnost
④ geom. podobnost
⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \to Y$)
⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
↑ relace na V, $xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
↑ $xRy \equiv \exists$ cesta $x \to y$ & $\exists$ cesta $y \to x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid aRx\}$
nebo xRa ... to je díky symetrii totéž

$\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

Věta: Nechť R je ekvivalence na množině A.
① $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.
② $\forall x,y \in A:$ buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.
③ $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R.

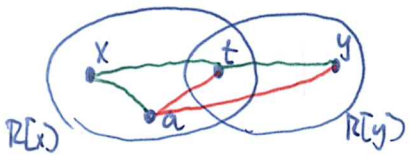
Představa:

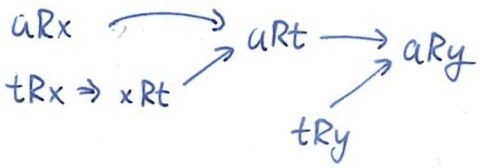


Dk: ① triviální díky $x \in R[x]$
② ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$ ... prohozením x,y získáme $R[x] \supseteq R[y]$ a zkombinováním inkluzí rovnost.

Nechť $t \in R[x] \cap R[y]$ a $a \in R[x]$. Ukážeme, že $a \in R[y]$.
$t \in R[x]$ & $t \in R[y]$ ... tedy aRx ... aRy

Obrázkem:





③ xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

Třídy pro naše příklady ekvivalencí: ② rovnost mod n → n zbytkových tříd
⑥ neorient. dosažitelnost → komponenty souvislosti
⑦ orient. —"— → —"— silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$
① $\forall A \in \mathcal{Y}: A \neq \emptyset$
② $\forall A,B \in \mathcal{Y}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
③ $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

ekviv. třídy tvoří rozklad, naopak ke každému rozkladu vytvoříme ekvivalenci "být v téže třídě", tedy $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{Y}: \{a,b\} \subseteq A$

Pozor, někdy se více hodí rozklad dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozklad V.

Na okraj: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence – nejsou tranzitivní.
Třeba na $\mathbb{R}$: $x B y \equiv |x-y| \leq 1$. Tehdy $1B2$ a $2B3$, ale $\neg 1B3$.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rano)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání $\equiv$
R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Df: Prvky $a,b \in A$ jsou porovnatelné $\equiv aRb$ nebo bRa.
Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Často značíme $\leq, \preceq, \sqsubseteq$ apod.

Df: Částečně uspořádaná množina (ČUM) je dvojice (A,R), kde A je množina a R uspořádání na A.

Podobně: Ostré uspořádání $a < b \equiv a \leq b \;\&\; a \neq b$
↳ ireflexivní ($\forall x\, x \not< x$), antisymetrické, tranzitivní

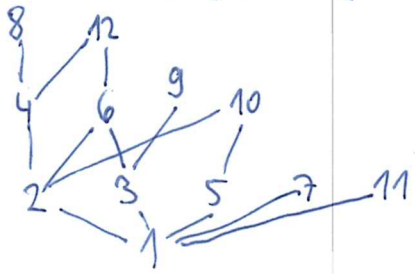
Příklady: ① $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární
② $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární
③ id_X žádné 2 různé prvky nejsou porovnatelné
④ $(\mathbb{N}^+, \backslash)$ - dělitelnost $2\backslash 4$, $4\backslash 12$, ale 4,6 neporovnatelné
pozor: $\backslash$ na $\mathbb{Z}$ není uspř., protože $-2\backslash 2$ & $2\backslash -2$
⑤ $(2^X, \subseteq)$ - inkluze množin pro $X = \{1,2,3\}$: $\{1\} \subseteq \{1,3\}$, kdežto $\{1,3\}, \{2,3\}$ neporov.
⑥ lexikografické uspořádání: pro $(A, \leq)$ ČUM definujeme $\leq_{Lex}$ na A^2:
$(x_1, x_2) \leq_{Lex} (y_1, y_2) \equiv x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \;\&\; x_2 \leq y_2)$
- na A^k: $(x_1 \dots x_k) \leq_{Lex} (y_1 \dots y_k) \equiv x_1 \dots x_k = y_1 \dots y_k \vee$
$\exists i: 1 \leq i \leq k \;\&\; x_1 = y_1 \;\&\; \dots \;\&\; x_{i-1} = y_{i-1} \;\&\; x_i < y_i$
- na A^* (množina všech konečných posloupností prvků z A, tedy řetězců znaků z A):
$(x_1 \dots x_k) \leq_{Lex} (y_1 \dots y_\ell)$ pro $n := \min(k,\ell)$ je
$(x_1 \dots x_n) <_{Lex} (y_1 \dots y_n) \vee$
$(x_1 \dots x_n) = (y_1 \dots y_n) \;\&\; k \leq \ell$
} $ab < abc < ac$

Znázornění: Hasseův diagram

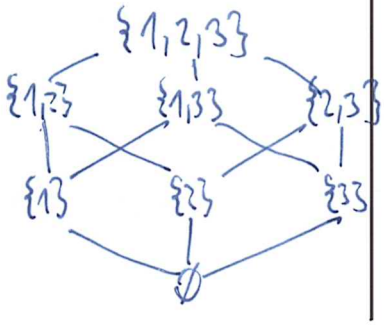
např. 4 / 3 / 2 / 1 / 1 — co je nahoře, je větší & hrany plynoucí z tranzitivity nekreslíme

Df: Relace bezprostředního předchůdce pro ČUM $(X, \leq)$ je $\lhd$ na X t.ž.
$\forall x,y \in X: x \lhd y \equiv x < y \;\&\; \nexists z \in X: x \leq z \;\&\; z < y$

- Pro dělitelnost na $\{1 \dots 12\}$:



- Pro $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$:



Df: Pro ČUM $(X, \leq)$ je prvek $x \in X$:
- nejmenší $\equiv \forall y \in X: x \leq y$ — existuje nejvýše jeden
- minimální $\equiv \nexists y \in X: y < x$
- podobně největší a maximální

Df: $A \subseteq X$ je:
- řetězec $\equiv \forall a,b \in A$ jsou porovnatelné
- antiřetězec $\equiv \forall a,b \in A, a \neq b$ jsou neporovnatelné

množina všech min. prvků tvoří antiřetězec

v lineárně uspř. množině je nejmenší totéž co minimální, obecně nejmenší $\Rightarrow$ minimální, ale ne naopak.