Úloha: Chceme ze souvislého grafu odstranit co nejvíce hran, aniž bychom porušili souvislost ⇒ hledáme minimální souvislý podgraf se stejnou množinou vrchola.

↓ takovým grafům se říká stromy

↓ souvislý & smazáním libovolné hrany se stane nesouvislým

(uvědomme, že všechny kostry mají stejný #hran)

↓ tomu se říká kostra grafu [jemně existuje – lze ji získat opak. mazáním hran]

Lemma: Graf T je strom $\Leftrightarrow$ T je souvislý a acyklický. (bez kružnic)

Dk: Stačí pro T souvislý dokázat: T je min. souvislý $\Leftrightarrow$ T je acyklický
tj. T není min. souvislý $\Leftrightarrow$ T je cyklický.

$\Leftarrow$ pokud T obsahuje cyklus, smazání hrany na cyklu neporuší souvislost

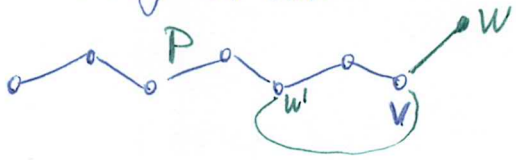
$\Rightarrow$ pokud smazání hrany $e=\{x,y\}$ neporuší souvislost, pak v $T-e$ existuje cesta mezi x,y ... přidáme-li k ní e, máme cyklus v T.

Df: Les je acyklický graf — To jsou grafy, jejichž komponenty jsou stromy.

Df: List je vrchol stupně 1. ← o listech uvažujeme i v grafech, které nejsou lesy

Lemma: Každý strom s aspoň 2 vrcholy má list.

Dk: Uvažme nejdelší cestu:



kdyby v nebyl list, vede z něj další hrana. Kam?

- na P → máme cyklus ↯
- mimo P → P lze prodloužit ↯

[Oddvence jsme našli 2 listy] ∎

Lemma: Nechť G je graf a v jeho list.
Pak G je strom $\Leftrightarrow$ $G-v$ je strom. ($G-v = G[V(G)\setminus\{v\}]$)

v dalším používáme strom $\Leftrightarrow$ souvislý acyklický

Dk: $\Rightarrow$ $G-v$ je podgrafem acyklického grafu G $\Rightarrow$ je také acyklický
libovolné vrcholy $x,y \neq v$ jsou v G spojené cestou, která neobsahuje v ($\deg(v)=1$), takže tato cesta existuje i v $G-v$. **Proto $G-v$ je souvislý.**

$\Leftarrow$ G je acyklický: případná kružnice by neobsahovala v $\Rightarrow$ byla by i v $G-v$
G je souvislý: kdyby nebyl, má aspoň 2 komponenty $\Rightarrow$ $\exists$ komponenta bez v, ta musí být i komponentou $G-v$. ∎

Věta: Strom s n vrcholy má $n-1$ hran.

Dk: Indukcí podle n ...

- pro $n=1$ triv. platí
- $n \to n+1$ ... nechť T je strom s $n+1$ vrcholy, $l :=$ jeho nějaký list
  $T' := T-l$ je strom s n vrcholy $\overset{IP}{\Rightarrow}$ má $n-1$ hran
  T má o 1 hranu více, tedy n. ∎

Věta: Souvislý graf na n vrcholech s $n-1$ hranami je strom.

Dk: Chceme provést podobnou indukci, ale kde vzít list? V kroku $n \to n+1$: Mějme libovolný graf G s $n+1$ vrcholy a n hranami (souvislý).

Tvrzení: G má alespoň 1 list.

Dk: $|E| = n \Rightarrow \sum_v \deg(v) = 2n \Rightarrow$ průměrný stupeň < 2

Proto $\exists l$: $\deg(l) < 2$ ... ale graf je souvislý, takže $\deg(l)$ nemůže být 0.] zde využíváme toho, že $n+1 \geq 2$

Nyní $G' = G - l$ ... stále souvislý, n vrcholů, $n-1$ hran $\overset{IP}{\Rightarrow} G'$ je strom $\overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} G$ je strom. ▨

$G =$

Věta: Následující vlastnosti grafu G jsou ekvivalentní:

1. souvislý & acyklický
2. minimální souvislý – souvislý, ale po odebrání lib. hrany už nebude
3. maximální acyklický – acyklický, ale po přidání lib. hrany už nebude
4. souvislý & $|E| = |V| - 1$
5. acyklický & $|E| = |V| - 1$ "Eulerova formule"
6. jednoznačně souvislý – $\forall u, v \in V(G)$ $\exists$ právě 1 cesta mezi u, v

Dk: Umíme už 1 ⇔ 2 ⇔ 4, ostatní necháme jako cvičení.

Důsledky pro kostry:

Všechny kostry grafu mají stejný # hran

⇓

je jedno, jestli hledáme minimální souvislý podgraf vzhledem k # hran nebo k inkluzi.

Úloha: Kolik existuje stromů s $V = \{1 \dots n\}$? (neboli kolik koster má graf K_n?)

↳ označíme s_n

Věta (Cayleyho formule): $s_n = n^{n-2}$.

Dk: Budeme dvěma způsoby počítat posloupnosti: uspořádané trojice (T, r, c)

- T: strom na vrcholech $\{1 \dots n\}$
- r: kořen, $r \in V(T)$
- c: očíslování hran: bijekce $[n-1] \to E(T)$

Postup výstavby kořenového stromu ☺

Nechť $p_n :=$ # posloupností s n vrcholy.

Pak jistě $p_n = s_n \cdot n \cdot (n-1)!$

(volby T · volby r · volby c)

Jiným způsobem: postupně přidáváme hrany podle c a vytváříme strom T.

- T si představíme zorientovaný směrem ke kořeni.
- kořen je jediný s $\deg^{out}(_) = 0$, ostatní vrcholy mají $\deg^{out}(_) = 1$.
- v průběhu stavby máme nějaký podgraf: les stromů orientovaných k jejich kořenům.
- každá další hrana musí vést z nějakého kořene do libovolného vrcholu jiného stromu
- pokaždé spojíme 2 stromy ⇒ v k-tém kroku máme $n-k+1$ stromů.

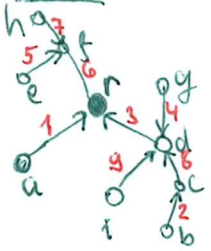
- # možností v k-tém kroku: $n \cdot (n-k)$
  - n: cílový vrchol
  - $(n-k)$: kořen jiného stromu
- vynásobením přes všech $n-1$ kroků:

$$P_n = \prod_{k=1}^{n-1} n\cdot(n-k) = n^{n-1}\cdot(n-1)!$$

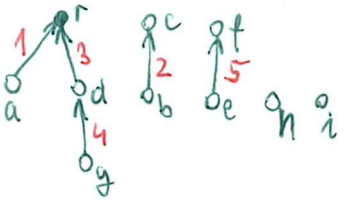
Z toho: $S_n \cdot n\cdot(n-1)! = n^{n-1}\cdot(n-1)!$

tedy: $S_n = n^{n-2}$.

Příklad:



Před přidáním 6. hrany:



RELACE (zejména binární)

Připomenutí: uspořádané dvojice (x,y)

kartézský součin $X\times Y := \{(x,y) \mid x\in X,\ y\in Y\}$

Co udělá $X\times Y\times Z$? Pozor: $(X\times Y)\times Z$ produkuje $((x,y),z)$

ale $X\times(Y\times Z)$ dává $(x,(y,z))$

Konvence: obojí považujeme za alternativní zápisy uspořádané trojice

} takže $\times$ určitě můžeme považovat za asociativní

↓

v definici kartézské mocniny $X^n = X\times X\times\dots\times X$ nemusíme uvažovat o uzávorkování

Def: (Binární) relace mezi množinami A a B je podmnožina kartézského součinu $A\times B$.

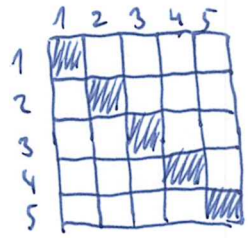
Def: Relace na množině A ≡ relace mezi A a A.

Představa: Je to nějaký vztah mezi prvky A a B

… skříňka, do které vložíme $a\in A$ a $b\in B$ a ona odpoví ANO/NE.

Příklady na množině $A = \{1,2,3,4,5\}$

① rovnost $\{(1,1),(2,2),\dots,(5,5)\}$



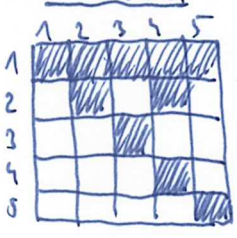
"$a=b$" je vlastně zkratka za $(a,b)\in =$

→ obecně identická relace

$id_A := \{(a,a) \mid a\in A\}$

zvaná též diagonální relace Δ_A.

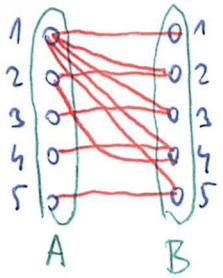
② dělitelnost



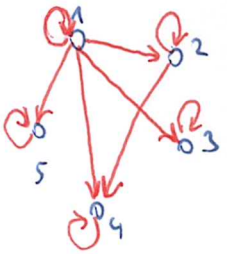
$\{(1,1),\dots,(1,5),$
$(2,2),(2,4),$
$(3,3),$
$(4,4),$
$(5,5)\}$

Jiné způsoby kreslení:

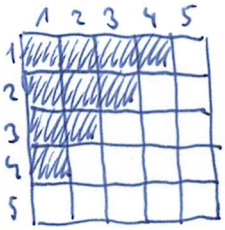
a) bipartitní graf



b) orientovaný graf pro relace na A (pozor, dovolujeme smyčky)



③ $x+y \le 5$

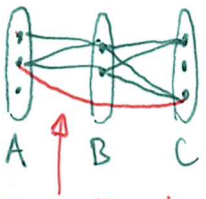


④ prázdná relace $\emptyset$ (graf bez hran)

⑤ univerzální relace $A\times B$ (něco jako úplný graf)

Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B, pak $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ je relace mezi B, A. } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C, pak $R \circ S := \{(a,c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B : aRb \,\&\, bSc\}$



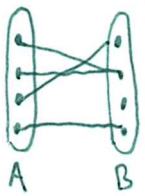
"zkratka" za každou cestu $A \to B \to C$

$R \circ id_B = R$, $id_A \circ R = R$

Df: Funkce neboli zobrazení z A do B je relace f mezi A a B t.ž. $\forall a \in A \; \exists! b \in B : a f b$. } značíme $f : A \to B$, $f(x) := y$ t.ž. xfy (jednoznačně určené)

id_A je identické zobrazení

Df: $f : A \to B$ je
- **prostá** (injektivní) $\equiv \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
- **na** (surjektivní) $\equiv \forall b \in B \; \exists a \in A : f(a) = b$
- **vzájemně jednoznačná** (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



je to funkce: $\deg(a) = 1$ pro $a \in A$
prostá: $\deg(b) \leq 1$
na: $\deg(b) \geq 1$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (nebo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ② $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ (pro $x<0$, pro $x>0$) ③ $\mathrm{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mohutnost množiny (kardinalita) ④ $f : A \times B \to C$ funkce dvou proměnných

Je-li $f : A \to B$, $g : B \to C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$
nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

Pro $f : A \to B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow$ f je bijekce

---

Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

Df: Relace R na množině A je:
- **reflexivní** $\equiv \forall a \in A : aRa$ $\leftarrow$ $id_A \subseteq R$
- **symetrická** $\equiv \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ $\leftarrow$ $R = R^{-1}$
- **tranzitivní** $\equiv \forall a, b, c \in A : aRb \,\&\, bRc \Rightarrow aRc$ $\leftarrow$ $R \circ R \subseteq R$ příklady: $x<y$, $x=y$
- **antisymetrická** $\equiv \forall a, b \in A : aRb \,\&\, bRa \Rightarrow a = b$ $\leftarrow$ $R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je **ekvivalence** $\equiv$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní.

Značení: často $\equiv$, $\approx$, $\sim$, $\triangleq$ apod. "různá rovnítka"

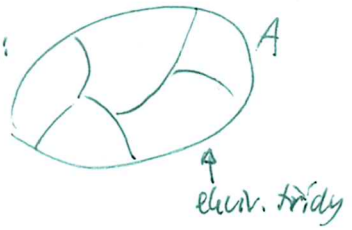
Příklady:
① rovnost na $\mathbb{N}$
② rovnost modulo n
③ geometrická shodnost
④ geom. podobnost
⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké ($\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) \Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \to Y$)
⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
↑ relace na V, $xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
↑ $xRy \equiv \exists$ cesta $x \to y$ & $\exists$ cesta $y \to x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid aRx\}$
nebo xRa ... to je díky symetrii totéž

$\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

Věta: Nechť R je ekvivalence na množině A.
① $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.
② $\forall x,y \in A:$ buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.
③ $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R.

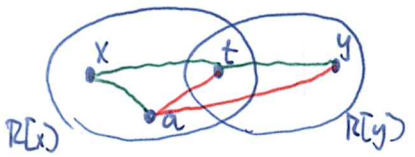
Představa:

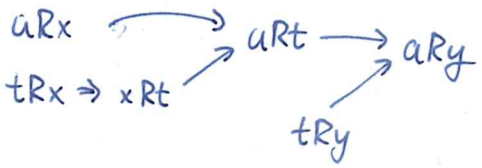


Dk: ① triviální díky $x \in R[x]$
② ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$ ... prohozením x,y získáme $R[x] \supseteq R[y]$ a zkombinováním inkluzí rovnost.

Nechť $t \in R[x] \cap R[y]$ a $a \in R[x]$. Ukážeme, že $a \in R[y]$.
$t \in R[x]$ & $t \in R[y]$ ... tedy aRx ... aRy

Obrázkem:





③ xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

Třídy pro naše příklady ekvivalencí: ② rovnost mod n → n zbytkových tříd
⑥ neorient. dosažitelnost → komponenty souvislosti
⑦ orient. —"— → —"— silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{Y} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$
① $\forall A \in \mathcal{Y}: A \neq \emptyset$
② $\forall A,B \in \mathcal{Y}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$
③ $\bigcup_{A \in \mathcal{Y}} A = X$

ekviv. třídy tvoří rozklad, naopak ke každému rozkladu vytvoříme ekvivalenci "být v téže třídě", tedy $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{Y}: \{a,b\} \subseteq A$

Pozor, někdy se více hodí rozklad dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozklad V.

Na okraj: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence – nejsou tranzitivní.
Třeba na $\mathbb{R}$: $x B y \equiv |x-y| \leq 1$. Tehdy $1B2$ a $2B3$, ale $\neg 1B3$.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rano)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání $\equiv$
R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Df: Prvky $a,b \in A$ jsou porovnatelné $\equiv aRb$ nebo bRa.
Uspořádání je lineární (úplné) $\equiv$ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Často značíme $\leq, \preceq, \sqsubseteq$ apod.

Df: Částečně uspořádaná množina (ČUM) je dvojice (A,R), kde A je množina a R uspořádání na A.