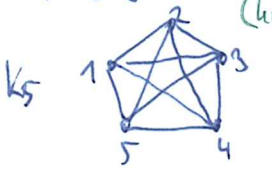
Zpět ke grafům: ukažme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n $(n \geq 1)$ (kompletní)



$V := \{1 \dots n\}$

$E := \binom{V}{2}$

Prázdný graf E_n $(n \geq 1)$

$V := \{1 \dots n\}$

$E := \emptyset$

Cesta P_n $(n \geq 0)$ (path)

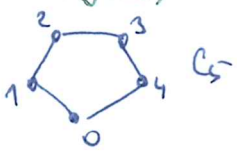
#hran (délka cesty)



$V = \{0 \dots n\}$

$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

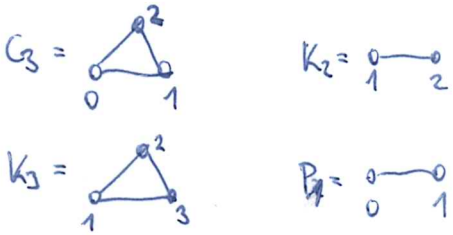
Kružnice C_n $(n \geq 3)$ (cyklus)



$V = \{0 \dots n-1\}$

$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$

Některé grafy "vypadají stejně", i když jsou různé



Df: Grafy G a H jsou **izomorfní** $\equiv$ liší se jen označením vrcholů. } pozdeji řekneme poradne

Rozmyslete si: které další dvojice grafů K_n, E_n, P_n, C_n jsou izomorfní?

Už známe: • stupeň $\deg_G(v)$ ... **Df:** Graf je **k-regulární** pro $k \in \mathbb{N} \equiv \forall v \in V: \deg(v) = k$

regulární $\equiv \exists k$: je k-regulární

K_n je $(n-1)$-regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg., P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Dk: Obě strany počítají "konce hran", formálněji (v, e) t.ž. $e \in E, v \in e$

→ **důsledek:** graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně

"princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy !

Podgrafy: **Df:** Graf $G' = (V', E')$ je **podgrafem** grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V$ & $E' \subseteq E$

↳ značíme $G' \subseteq G$

... je **indukovaným podgrafem**: $V' \subseteq V$, $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ← vybereme vrcholy a zdědíme hrany

↳ $G[V']$:= podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)

Podgrafy E_n jsou zase jen prázdné.

Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: **souvislost**: pro každé 2 vrcholy $\exists$ cesta, která je spojuje → **cesta v grafu**: posloupnost vrcholů a hran; podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n

Nesouvislý graf můžeme rozložit na komponenty souvislosti $\equiv$ souvislé podgrafy maximální v inkluzi:

$K \subseteq G$ je komponenta $\equiv K$ je souvislý & $\forall K': K \subsetneq K' \subseteq G$ není souvislý.

analogicky **kružnice v grafu**

Ale pozor, stezky nejde obecně popsat jako podgrafy!

Graf je souvislý ⇔ má právě 1 komponentu souvislosti. ! Problematické, kdybychom dovolovali $V = \emptyset$

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
↳ označíme $T(n)$. Pro srovnání: K_n má $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ hran

- Malé případy: $T(1) = 0$ • $T(2) = 1$ — • $T(3) = 2$ — — $T(4) = 4$ □ $T(5) = 6$ ◇ … lepší než C_5 s 5 hranami
  $T(6) = ?$ … $T(6) \geq 9$

Věta: Pro sudé n je $T(n) = \frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, ale to nebudeme dokazovat

toto je $K_{3,3}$

Dk: ① $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$ … graf $K_{n/2, n/2}$ nemá Δ ← $K_{a,b}$ je úplný bipartitní graf:

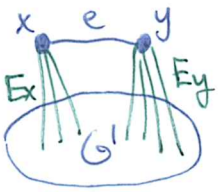
$V := \{1 \dots a, 1' \dots b'\}$
$E := \{\{i, j'\} \mid 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b\}$

Obecně: G je bipartitní ≡ vrcholy lze rozdělit na 2 části ("partity") tak, že uvnitř částí nevedou hrany. ← $G[\text{partita}]$ nemá hrany

② $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ indukcí podle n

- $T(2) = 1 = \frac{2^2}{4}$
- $n \to n+2$: Nechť G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy
  Zvolme hranu $e = \{x, y\} \in E$ libovolně:

kdyby žádná neexistovala, jistě je $0 = |E| \leq \frac{n^2}{4}$



→ označíme $G' = (V', E')$

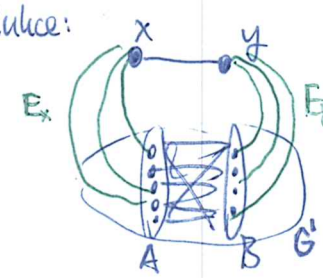
$G' := G[V']$
kde $V' := V \setminus \{x, y\}$
graf bez Δ s n vrcholy

} → podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

- x, y nemohou mít společného souseda ⇒ $|E_x| + |E_y| \leq n$
- $E = E' \cup E_x \cup E_y \cup \{e\}$ ⇒ $|E| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$. ▨

Dodatek: **Věta*:** Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran) jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2, n/2}$.

Dk: Podobná indukce:



← podle IP je to $\cong K_{n/2, n/2}$

⇒ $A \cup \{y\}$ a $B \cup \{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}}$ ▨

x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ), BÚNO do A
y taktéž (ještě nevíme, zda do A nebo B)
ale hran musí být n, aby vyšel celkový počet ⇒ x je spojen se všemi vrcholy z A, y se všemi z B (BÚNO)

x, y nemají společné sousedy v G'
⇒ $|E_x| + |E_y| \leq n$
G' nemá Δ ⇒ $|E(G')| \leq T(n) = \frac{n^2}{4}$
aby se $|E(G)| + |E_x| + |E_y| + 1$ nasčítalo na $T(n+2) = \frac{(n+2)^2}{4}$, musí být
$|E_x| + |E_y| = n$ & $|E(G')| = T(n)$

protože zde mohu použít IP