GRAFY, CESTY, TAHY

Úloha: Mosty města Královce (a.k.a. Königsbergu / Kaliningradu) – Euler 1736
... nebo také kreslení domečku jedním tahem

↳ **graf** (matem. struktura) **Def:** (V, E), kde V je množina **vrcholů** (konečná, neprázdná)
a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina **hran**

$e = \{u, v\}$ je hrana mezi vrcholy u, v
$u \in e$, $v \in e$

↳ grafy jsou dobré modely (binárních) vztahů mezi nějakými objekty
Příklad: Náměstí spojená ulicemi, stavy hlavolamu atd.

- Cestování po grafu: posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$
kde $\forall i\ v_i \in V$, $\forall j\ e_j \in E$, $\forall j\ e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$

- Co se smí opakovat? ① cokoliv → **sled**, ② nic → **cesta**, ③ jen vrcholy → **tah**

↳ Hledáme **eulerovský tah** – to je takový, jenž obsahuje všechny vrcholy i hrany grafu

uzavřený $\equiv v_0 = v_n$ — **otevřený** $\equiv v_0 \neq v_n$

to je také potřeba: 

proč nestačí pouze hrany?

proč ne vrcholy?



(to zatím naše definice grafu nedovolují, ale časem ji změníme)

- Nutné podmínky pro existenci uzavřeného eulerovského tahu:

① graf musí "držet pohromadě": **Def:** Graf je **souvislý** ≡
pro všechny $u, v \in V$
existuje cesta z u do v

Lemma: Pokud existuje sled z u do v, existuje i cesta z u do v.

Dk: Uvažme nejkratší sled z u do v. ← nezapomenout ošetřit případ $u = v$.
Kdyby nebyl cestou, existuje nějaký vrchol t, který se v něm opakuje:



tuto část můžeme odstranit
a tak získat kratší sled ↯

② každý vrchol se účastní sudého počtu hran: **Def:** Stupeň vrcholu $\deg_G(v) :=$
$|\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Uvažme uzavř. eul. tah T a všechny výskyty nějakého vrcholu v:

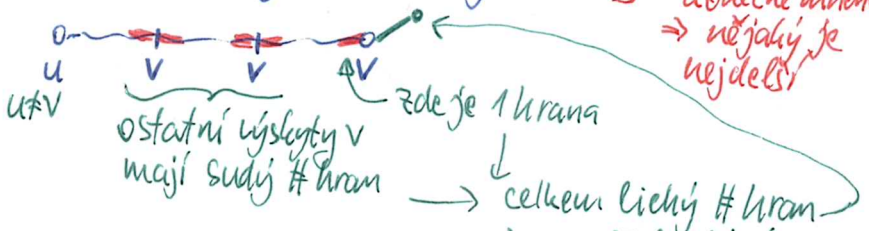


Každá hrana z vrcholu v leží před/za výskytem v → dvojice hran.
Dvojice se nepřekrývají ⇒ #hran = 2 · #dvojic, což je sudé.

Věta: Graf má uzavřený eulerovský tah ⇔ je souvislý & všechny vrcholy mají sudé stupně.

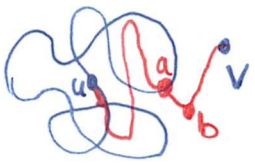
Důkaz: ⇒ už máme hotové, zbývá ⇐. Uvažme nejdelší možný tah T. [tahů je konečně mnoho ⇒ nějaký je nejdelší]

① T je uzavřený: kdyby nebyl:



Tah můžeme prodloužit ↯

② T obsahuje všechny vrcholy ... kdyby existoval v neležící na T, ← "nenakreslený" vrchol
vyberme libovolný u na T a najděme cestu P z u do v (souvislost ⇒ existuje).



Cesta P začíná na T, končí mimo ⇒ někde je přechod...
vyberme poslední $a \in P$, které leží na T
a následníka $b \in P$, ten už na T neleží } b může, ale nemusí být roven v

→ b je nenakreslený a sousedí s nakresleným a hranou.
→ tah "rozstřihneme" při libovolném průchodu a, přidáme hranu $\{a,b\}$
→ získali jsme delší tah ↯

③ T obsahuje všechny hrany ... kdyby existovala nenakreslená hrana $\{u,v\}$,
kde u,v jsou nakreslené vrcholy
→ tah rozstřihneme v u a prodloužíme o hranu $\{u,v\}$
→ opět spor s maximalitou T ↯

→ může existovat 1 vrchol lichého stupně?

Co otevřené tahy? Souvislost & právě 2 vrcholy lichého stupně. (cvičení)

Grafy můžeme definovat orientovaně ... příklad: "ireverzibilní" tahy ve hrách, jednosměrné ulice

Df: Orientovaný graf je dvojice (V,E), kde V je konečná množina vrcholů } lépe též neprázdná
a $E \subseteq V^2$ množina hran (šipek). ← připouští smyčky

- sledy, tahy, cesty zobecníme přirozeně
- lemma sled → cesta stále funguje
- souvislost se komplikuje: a) silná souvislost ≡ $\forall u,v \in V\ \exists$ cesta $u \to v$ (orientovaná)

  b) slabá souvislost ≡ "zapomenutím orientace" vznikne souvislý neorient. graf

  → podkladový graf orient. grafu (V,E) je (neorientovaný) graf (V,E') t.ž. $E' = \{\{u,v\} \mid (u,v) \in E \vee (v,u) \in E\}$

  silná ⇒ slabá, ale ne opačně: $a \to b \leftarrow c$

- stupeň se rozdělí na vstupní $\deg^{in}_G(v) := |\{u \in V(G) \mid (u,v) \in E(G)\}|$ (množina vrcholů grafu G)
  výstupní $\deg^{out}_G(v) := |\{w \in V(G) \mid (v,w) \in E(G)\}|$
- místo sudosti stupňů: **Df:** G je vyvážený ≡ $\forall v \in V(G): \deg^{in}_G(v) = \deg^{out}_G(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. G je vyvážený a slabě souvislý.
2. G obsahuje uzavřený eulerovský tah.
3. G je vyvážený a silně souvislý.

} Proto: pro vyvážené grafy je silná a slabá souvislost ekvivalentní

Dk: 1 ⇒ 2 ... snadná úprava důkazu neorientované verze věty
2 ⇒ 3 ... taktéž
3 ⇒ 1 ... přímo z definice souvislosti

Souvislosti:
- najít eul. tah je snadné (algoritmicky)
- najít hamilton. cyklus je těžké

Cvičení: Jak vypadají grafy s otevřeným euler. tahem? (orientované)
Cvičení: Co kdyby mezi 2 vrcholy vedlo více hran? (multigraf)

Příklad: Otevíráme sejf, hledáme posloupnost číslic, v níž se každé trojčíslí vyskytne aspoň jednou. (nebo obecně k-číslí...)

navštíví každý vrchol právě 1×

Zjednodušení: Dvojková soustava místo desítkové, posloupnost je cyklická. → pro $k=2$ funguje 0110

Je potřeba délka $\geq 2^k$ ... ukážeme, že tolik stačí.

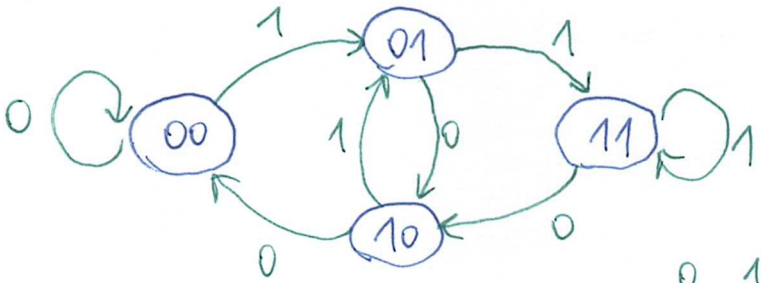
Df: de Bruijnova posloupnost řádu k je cyklická posloupnost 0,1 délky 2^k t.ž. každý k-znakový řetězec 0,1 se v ní vyskytuje právě jednou.
↑ jako souvislá podposloupnost

Věta: Pro každý řád $k \geq 1$ existuje dBp. řádu k.

Dk: Pro $k=1$ je věta triviální (posl. 01 je dBp.), uvažme $k>1$.
Sestrojíme orientovaný graf: $V := \{0,1\}^{k-1}$

$$E := \{(x_1 \dots x_{k-1}, x_2 \dots x_k) \mid x_1 \dots x_k \in \{0,1\}^k\}$$

Příklad pro $k=3$:



- $\deg^{in}(v) = 2$
- $\deg^{out}(v) = 2$

} graf je vyvážený

- graf je souvislý

⇓

∃ uzavřený euler. tah

00 → 00 → 01 → 10 → 01 → 11 → 11 → 10 → 00
0 1 0 1 1 1 0 0

posloupnost := označení hran v pořadí daném tahem

když tah dojde do vrcholu $x_1 \dots x_{k-1}$, předchozích $k-1$ hran je označeno $x_1 \dots x_{k-1}$

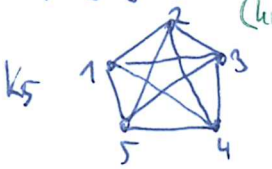
↳ když chci najít $x_1 \dots x_k$, vyberu ten ze dvou výskytů $x_1 \dots x_{k-1}$, po kterém následuje x_k.

↳ posl. 01011100 je dBp. řádu 3.

Cvičení: Rozšiřte na libovolnou konečnou abecedu.

Zpět ke grafům: ukažme si nějaké příklady.

Úplný graf K_n $(n \geq 1)$ (kompletní)



$V := \{1 \dots n\}$

$E := \binom{V}{2}$

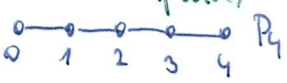
Prázdný graf E_n $(n \geq 1)$

$V := \{1 \dots n\}$

$E := \emptyset$

Cesta P_n $(n \geq 0)$ (path)

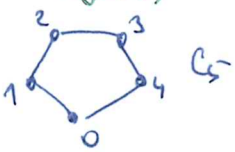
#hran (délka cesty)



$V = \{0 \dots n\}$

$E = \{\{i-1, i\} \mid 1 \leq i \leq n\}$

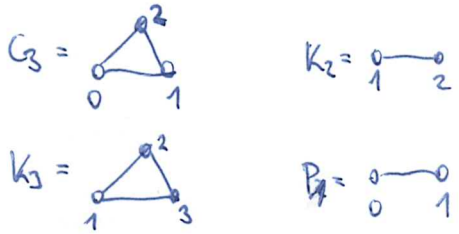
Kružnice C_n $(n \geq 3)$ (cyklus)



$V = \{0 \dots n-1\}$

$E = \{\{i, (i+1) \bmod n\} \mid 0 \leq i < n\}$

Některé grafy "vypadají stejně", i když jsou různé



Def: Grafy G a H jsou **izomorfní** ≡ liší se jen očíslováním vrcholů. } pozdeji řekneme poradne

Rozmyslete si: které další dvojice grafů K_n, E_n, P_n, C_n jsou izomorfní?

Už známe: • stupeň $\deg_G(v)$ ... **Def:** Graf je **k-regulární** pro $k \in \mathbb{N} \equiv \forall v \in V \ \deg(v) = k$

regulární ≡ $\exists k$: je k-regulární

K_n je $(n-1)$-regulární, E_n je 0-reg., C_n je 2-reg, P_n není reg.

Věta: $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2 \cdot |E|$

Dk: Obě strany počítají "konce hran", formálněji (v,e) t.ž. $e \in E, v \in e$

→ důsledek: graf obsahuje sudý počet vrcholů lichého stupně

"princip sudosti"

! neplatí pro nekonečné grafy !

Podgrafy: **Def:** Graf $G' = (V', E')$ je **podgrafem** grafu $G = (V, E) \equiv V' \subseteq V \ \& \ E' \subseteq E$

↳ značíme $G' \subseteq G$

... je **indukovaným podgrafem:** $V' \subseteq V$, $E' = E \cap \binom{V'}{2}$ ← vybereme vrcholy a zdědíme hrany

↳ $G[V'] :=$ podgraf indukovaný podmnožinou vrcholů V'

Podgrafy K_n jsou všechny grafy (až na označení vrcholů)

Podgrafy C_n jsou zase jen prázdné.

Indukované podgrafy K_n jsou úplné.

Už známe: **souvislost:** pro každé 2 vrcholy $\exists$ cesta, která je spojuje → **cesta v grafu** — posloupnost vrcholů a hran

podgraf izomorfní s P_n pro nějaké n

Nesouvislý graf můžeme rozložit na

komponenty souvislosti ≡ souvislé podgrafy maximální v inkluzi:

$K \subseteq G$ je komponenta ≡ K je souvislý & $\forall K'$: $K \subsetneq K' \subseteq G$ není souvislý.

analogicky **kružnice v grafu**

Ale pozor, všechny nejde obecně popsat jako podgrafy!

Graf je souvislý ⇔ má právě 1 komponentu souvislosti. ! Problematické, kdybychom dovolovali $V = \emptyset$

Úloha: Kolik nejvíce může mít hran graf bez Δ (cyklus délky 3) s n vrcholy.
↳ označíme $T(n)$. Pro srovnání: K_n má $\binom{n}{2} \approx \frac{n^2}{2}$ hran

- Malé případy: $T(1) = 0$ • $T(2) = 1$ — • $T(3) = 2$ — — $T(4) = 4$ □ $T(5) = 6$ ◇ … lepší než C_5 s 5 hranami
  $T(6) = ?$ … $T(6) \geq 9$

Věta: Pro sudé n je $T(n) = \frac{n^2}{4}$. ← obecně to je $\left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$, ale to nebudeme dokazovat

toto je $K_{3,3}$

Dk: ① $T(n) \geq \frac{n^2}{4}$ … graf $K_{n/2, n/2}$ nemá Δ ← $K_{a,b}$ je úplný bipartitní graf:

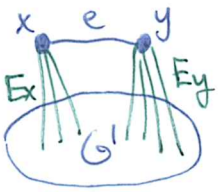
$V := \{1 \dots a, 1' \dots b'\}$
$E := \{\{i, j'\} \mid 1 \leq i \leq a, 1 \leq j \leq b\}$

Obecně: G je bipartitní ≡ vrcholy lze rozdělit na 2 části ("partity") tak, že uvnitř částí nevedou hrany. ← $G[\text{partita}]$ nemá hrany

② $T(n) \leq \frac{n^2}{4}$ indukcí podle n

- $T(2) = 1 = \frac{2^2}{4}$
- $n \to n+2$: Nechť G je graf bez Δ s $n+2$ vrcholy
  Zvolme hranu $e = \{x, y\} \in E$ libovolně:

kdyby žádná neexistovala, jistě je $0 = |E| \leq \frac{n^2}{4}$



→ označíme $G' = (V', E')$

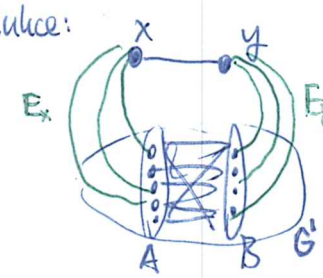
$G' := G[V']$
kde $V' := V \setminus \{x, y\}$
graf bez Δ s n vrcholy

} → podle IP: G' má max. $\frac{n^2}{4}$ hran

- x, y nemohou mít společného souseda ⇒ $|E_x| + |E_y| \leq n$
- $E = E' \cup E_x \cup E_y \cup \{e\}$ ⇒ $|E| \leq \frac{n^2}{4} + n + 1 = \frac{n^2 + 4n + 4}{4} = \frac{(n+2)^2}{4}$. ▨

Dodatek: **Věta*:** Extremální grafy (grafy bez Δ s max. # hran) jsou pro sudé n izomorfní s $K_{n/2, n/2}$.

Dk: Podobná indukce:



← podle IP je to $\cong K_{n/2, n/2}$

⇒ $A \cup \{y\}$ a $B \cup \{x\}$ jsou partity grafu izomorfního s $K_{\frac{n+2}{2}, \frac{n+2}{2}}$ ▨

x musí mít hrany jen do 1 partity (jinak Δ), BÚNO do A
y taktéž (ještě nevíme, zda do A nebo B)
ale hran musí být n, aby vyšel celkový počet ⇒ x je spojen se všemi vrcholy z A, y se všemi z B (BÚNO)

x, y nemají společné sousedy v G'
⇒ $|E_x| + |E_y| \leq n$
G' nemá Δ ⇒ $|E(G')| \leq T(n) = \frac{n^2}{4}$
aby se $|E(G)| + |E_x| + |E_y| + 1$ nasčítalo na $T(n+2) = \frac{(n+2)^2}{4}$, musí být
$|E_x| + |E_y| = n$ & $|E(G')| = T(n)$

protože zde mohu použít IP