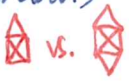
GRAFY, CESTY, TAHY



Úloha: Mosty města Královce (a.k.a. Königsbergu / Kaliningradu) – Euler 1736
... nebo také kreslení domečku jedním tahem  vs.

↳ graf (matem. struktura) Def: (V, E), kde V je množina vrcholů (konečná, neprázdná)
a $E \subseteq \binom{V}{2}$ množina hran

↳ grafy jsou dobré modely (binárních) vztahů mezi nějakými objekty
Příklad: Náměstí spojená ulicemi, stavy hlavolamu atd.

$e = \{u, v\}$ je hrana mezi vrcholy u, v
$u \in e$, $v \in e$

- Cestování po grafu: posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$
kde $\forall i\ v_i \in V$, $\forall j\ e_j \in E$, $\forall j\ e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$
- Co se smí opakovat? ① cokoliv → sled, ② nic → cesta, ③ jen vrcholy → tah
↳ hledáme eulerovský tah – to je takový, jenž obsahuje všechny vrcholy i hrany grafu
(to je také potřeba: )

proč nestačí pos. hran?
proč ne vrcholů?

(to zatím naše def. grafu nedovoluje, ale časem ji zobecníme)

uzavřený $\equiv v_0 = v_n$ — otevřený $\equiv v_0 \neq v_n$

- Nutné podmínky pro existenci uzavřeného euler. tahu:
① graf musí "držet pohromadě": Def: Graf je souvislý ≡
pro všechny $u, v \in V$
existuje cesta z u do v

Lemma: Pokud existuje sled z u do v, existuje i cesta z u do v.
Dk: Uvažme nejkratší sled z u do v. ← nezapomenout ošetřit případ $u = v$.
Kdyby nebyl cestou, existuje nějaký vrchol t, který se v něm opakuje:



tuto část můžeme odstranit
a tak získat kratší sled γ

② každý vrchol se účastní sudého počtu hran: Def: Stupeň vrcholu $\deg_G(v) := |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Uvažme uzavř. eul. tah T a všechny výskyty nějakého vrcholu v:

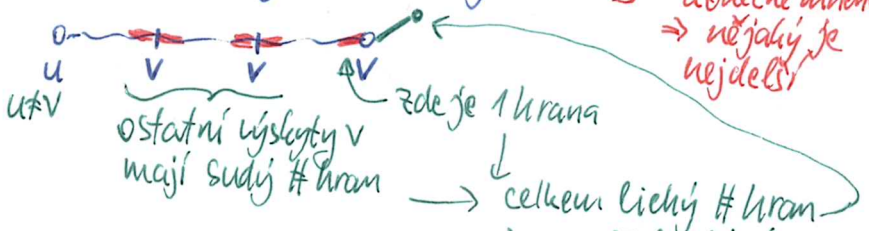


Každá hrana z vrcholu v leží před/za výskytem v → dvojice hran.
Dvojice se nepřekrývají ⇒ #hran = 2 · #dvojic, což je sudé.

Věta: Graf má uzavřený eulerovský tah ⇔ je souvislý & všechny vrcholy mají sudé stupně.

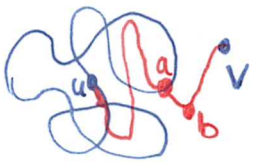
Důkaz: ⇒ už máme hotové, zbývá ⇐. Uvažme nejdelší možný tah T. [tahů je konečně mnoho ⇒ nějaký je nejdelší]

① T je uzavřený: kdyby nebyl:



Tah můžeme prodloužit ↯

② T obsahuje všechny vrcholy ... kdyby existoval v neležící na T, ← "nenakreslený" vrchol
vyberme libovolný u na T a najděme cestu P z u do v (souvislost ⇒ existuje).



Cesta P začíná na T, končí mimo ⇒ někde je přechod...
vyberme poslední $a \in P$, které leží na T
a následníka $b \in P$, ten už na T neleží } b může, ale nemusí být roven v

→ b je nenakreslený a sousedí s nakresleným a hranou.
→ tah "rozstřihneme" při libovolném průchodu a, přidáme hranu $\{a,b\}$
→ získali jsme delší tah ↯

③ T obsahuje všechny hrany ... kdyby existovala nenakreslená hrana $\{u,v\}$,
kde u,v jsou nakreslené vrcholy
→ tah rozstřihneme v u a prodloužíme o hranu $\{u,v\}$
→ opět spor s maximalitou T ↯

→ může existovat 1 vrchol lichého stupně?

Co otevřené tahy? Souvislost & právě 2 vrcholy lichého stupně. (cvičení)

Grafy můžeme definovat orientovaně ... příklad: "ireverzibilní" tahy ve hrách, jednosměrné ulice

Df: Orientovaný graf je dvojice (V,E), kde V je konečná množina vrcholů } lépe též neprázdná
a $E \subseteq V^2$ množina hran (šipek). ← připouští smyčky

- sledy, tahy, cesty zobecníme přirozeně
- lemma sled → cesta stále funguje
- souvislost se komplikuje: a) silná souvislost ≡ $\forall u,v \in V\ \exists$ cesta $u \to v$ (orientovaná)

  b) slabá souvislost ≡ "zapomenutím orientace" vznikne souvislý neorient. graf

  → podkladový graf orient. grafu (V,E) je (neorientovaný) graf (V,E') t.ž. $E' = \{\{u,v\} \mid (u,v) \in E \vee (v,u) \in E\}$

  silná ⇒ slabá, ale ne opačně: $a \to b \leftarrow c$

- stupeň se rozdělí na vstupní $\deg^{in}_G(v) := |\{u \in V(G) \mid (u,v) \in E(G)\}|$ (množina vrcholů grafu G)
  výstupní $\deg^{out}_G(v) := |\{w \in V(G) \mid (v,w) \in E(G)\}|$
- místo sudosti stupňů: **Df:** G je vyvážený ≡ $\forall v \in V(G): \deg^{in}_G(v) = \deg^{out}_G(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

1. G je vyvážený a slabě souvislý.
2. G obsahuje uzavřený eulerovský tah.
3. G je vyvážený a silně souvislý.

} Proto: pro vyvážené grafy je silná a slabá souvislost ekvivalentní

Dk: 1 ⇒ 2 ... snadná úprava důkazu neorientované verze věty
2 ⇒ 3 ... taktéž
3 ⇒ 1 ... přímo z definice souvislosti

Souvislosti:
- najít eul. tah je snadné (algoritmicky)
- najít hamilton. cyklus je těžké

Cvičení: Jak vypadají grafy s otevřeným euler. tahem? (orientované)
Cvičení: Co kdyby mezi 2 vrcholy vedlo více hran? (multigraf)

Příklad: Otevíráme sejf, hledáme posloupnost číslic, v níž se každé trojčíslí vyskytne aspoň jednou. (nebo obecně k-číslí...)

navštíví každý vrchol právě 1×

Zjednodušení: Dvojková soustava místo desítkové, posloupnost je cyklická. → pro $k=2$ funguje 0110

Je potřeba délka $\geq 2^k$ ... ukážeme, že tolik stačí.

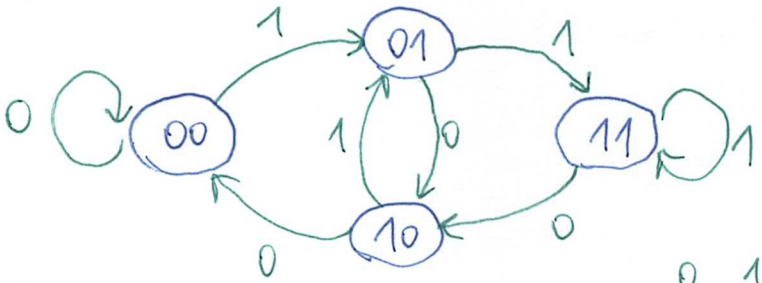
Df: de Bruijnova posloupnost řádu k je cyklická posloupnost 0,1 délky 2^k t.ž. každý k-znakový řetězec 0,1 se v ní vyskytuje právě jednou.
↑ jako souvislá podposloupnost

Věta: Pro každý řád $k \geq 1$ existuje dBp. řádu k.

Dk: Pro $k=1$ je věta triviální (posl. 01 je dBp.), uvažme $k>1$.
Sestrojíme orientovaný graf: $V := \{0,1\}^{k-1}$

$$E := \{(x_1 \dots x_{k-1}, x_2 \dots x_k) \mid x_1 \dots x_k \in \{0,1\}^k\}$$

Příklad pro $k=3$:



- $\deg^{in}(v) = 2$
- $\deg^{out}(v) = 2$

} graf je vyvážený

- graf je souvislý

⇓

∃ uzavřený euler. tah

00 → 00 → 01 → 10 → 01 → 11 → 11 → 10 → 00
0 1 0 1 1 1 0 0

posloupnost := označení hran v pořadí daném tahem

když tah dojde do vrcholu $x_1 \dots x_{k-1}$, předchozích $k-1$ hran je označeno $x_1 \dots x_{k-1}$

↳ když chci najít $x_1 \dots x_k$, vyberu ten ze dvou výskytů $x_1 \dots x_{k-1}$, po kterém následuje x_k.

↳ posl. 01011100 je dBp. řádu 3.

Cvičení: Rozšiřte na libovolnou konečnou abecedu.