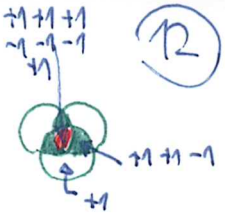
- To je vlastně: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$



$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



↓ zobecníme pro n množin

Věta (Princip inkluze a exkluze) Pro konečné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^{n} A_i \right| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|.$$

Alternativně:

$$\left| \bigcup_{i} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

[dokážeme za chvíli ... teď zpět k šatnářce]

- $A_1 - A_n$: $A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \}$ ← i je pevný bod
- $A := \bigcup_i A_i$ ← mají aspoň 1 pevný bod ... zajímá nás tedy $|A|$ (přesněji řečeno $n! - |A|$)
- pro PIE potřebujeme: $|A_i| = (n-1)!$

  $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$

  ⋮

  průnik k množin: $(n-k)!$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$\binom{n}{k}$ stejných členů

$\rightarrow \Sigma = \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot (n-k)! = \frac{n!}{k!}$

$$|A| = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

$P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)$

- Nás zajímá jev opačný: $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$



Pro $n \to \infty$ konverguje $P(\overline{A})$ k $\frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \#A_i$, v nichž se vyskytuje x ← $\#i : x \in A_i$

Průniky k množin → $1x$ → přispěje $(-1)^{k+1}$ — to je případ $j=k$

$j > k$ množin → $0x$

$j < k$ množin → $\binom{k}{j}$ j-tic obsahuje x → celkem přispějí $(-1)^{j+1}\binom{k}{j}$

Sečtením přes všechna j:

$$\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = -\sum_{j=1}^{k} (-1)^{j} \binom{k}{j} = 1$$

kdybychom sčítali od 0, bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty. Takhle chybí $(-1)^0\binom{k}{0} = 1$ → vyjde -1

Druhý důkaz PIE (abstraktnější)

- Zvolme $A := \bigcup_i A_i$ ... každé $X \subseteq A$ přiřadíme <u>charakteristickou funkci</u>
$$c_X : A \to \{0,1\} \text{ t.ž. } c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$
- Vlastnosti char. funkcí:
  - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
  - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{\overline{X} \cap \overline{Y}}} = 1 - (1-c_X)(1-c_Y)$
  - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$ ($\overline{X} = A \setminus X$)
  - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$
- Rozmásobíme $\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i$ (proměnné x_i) $\xrightarrow{\text{dosaz. } x_i \leftarrow -x_i}$ $\prod_{i=1}^{n} (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$
- Dosadíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:
$$\prod_{i=1}^{n} (1 - c_{A_i}) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} c_{A_i}$$
$1 - c_{A_i} = c_{\overline{A_i}}$, takže $\prod_i c_{\overline{A_i}} = c_{\bigcap_i \overline{A_i}} = 1 - c_{\bigcup_i A_i}$
pro $I \neq \emptyset$ je to $c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$; pro $I = \emptyset$ je to 1
- Upravujeme (do podoby ještě bližší PIE):
$$1 - c_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$
- Nakonec sečteme přes všechna $a \in A$:
$$\left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$ ... ejhle, PIE !

<u>Příbuzná otázka:</u> Kolik pevných bodů má průměrně náhodná permutace?

<u>Model</u> pro podobné otázky:

<u>Def:</u> <u>Náhodná veličina</u> na pr. prostoru je funkce $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ← třeba #1 při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jevu $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$

<u>Def:</u> <u>Střední hodnota</u> $\mathbb{E}(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$ ← vážený průměr (váhy = pstí)
↳ pro nekonečnou Ω nemusí existovat

$\mathbb{E}(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a$ ← nelekejte se nespočetné sumy — nejvýše spočetně členů může být nenulových

? $\mathbb{E}$ není medián ? → Většina lidí má nadprůměrný #ruku 😮
↑ $\mathbb{E}[\#\text{ruku}] < 2 \Rightarrow P(\#\text{ruku} > \mathbb{E}(\dots)) = 1-\varepsilon$

to je m t.ž. $P(X<m) \leq 1/2$
$P(X>m) \leq 1/2$

Příklad: 2 kostky, S = součet hodů: $\mathbb{E}(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a)\cdot a = \frac{1}{36}\cdot 2 + \frac{2}{36}\cdot 3 + \dots + \frac{6}{36}\cdot 7 + \frac{5}{36}\cdot 6 + \dots + \frac{1}{36}\cdot 12$

↓ ale jde to počítat snáz

Věta (linearita střední hodnoty): Nechť X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:
① $\mathbb{E}(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot \mathbb{E}(X)$
② $\mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$
} důkaz rozepsáním dle definice

→ X = hodnota 1. kostky
Y = hodnota 2. kostky
$S = X+Y \rightarrow \mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X+Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 2 \cdot 7/2 = 7$
} $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{6}(1+2+_+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

A zpět k Satnářce: B := #pevných bodů (náh. veličina)

$B_1 - B_n$: $B_i(\pi) := \begin{cases} 0 \\ 1 \text{ pokud } \pi(i)=i \end{cases}$ } indikátor jevu "i je pevný bod"

$B = \sum_i B_i \rightarrow \mathbb{E}(B) = \mathbb{E}(\sum B_i) = \sum_i \mathbb{E}(B_i)$ ← $\mathbb{E}(B_i) = P(B_i = 1) = \frac{1}{n}$

$= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ještě 1 příklad na indikátory: Posloupnost n hodů mincí … $\Omega = \{0,1\}^n$
Chceme $\mathbb{E}(\underbrace{\#\text{úseků stejných hodnot}}_{U})$

$U_1 - U_n$ … U_i := indikátor jevu "na pozici i začíná úsek"

U_1 je vždy 1 → $\mathbb{E}(U_1) = 1$
Jinak $U_i = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ $P = 1/2$ → $\mathbb{E}(U_i) = 1/2$
} $\mathbb{E}(U) = \sum_i \mathbb{E}(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

↑ i-tý hod se liší od $(i-1)$-tého