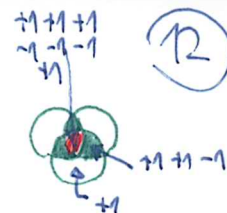


- To je vlastně: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



↓ zobecníme pro n množin

Věta (Princip inkluze a exkluze) Pro konечné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

[Dokážeme za chvíli ... teď zpět k šatnářce]

Alternativně:

$$\left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

- $A_1 - A_n$: $A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \}$ ← i je pevný bod

- $A := \bigcup_i A_i$ ← mají aspoň 1 pevný bod ... zajímá nás tedy $|A|$ (přesněji řečeno $n! - |A|$)

- pro PIE potřebujeme: $|A_i| = (n-1)!$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

⋮

$$\text{průnik } k \text{ množin: } (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$\binom{n}{k}$ stejných členů

$$\rightarrow S = \frac{n!}{k!} \cdot (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

$$P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)$$

- Nás zajímá jev opačný: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

👁 Pro $n \rightarrow \infty$ konverguje $P(\bar{A})$ k $\frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \# A_i$, v nichž se vyskytuje x ← $\# A_i : x \in A_i$

Průniky k množin $\rightarrow 1 \cdot x$ → přispěje $(-1)^{k+1}$

$j > k$ množin $\rightarrow 0 \cdot x$

$j < k$ množin $\rightarrow \binom{k}{j}$ j -tic obsahuje x → celkem přispěje $(-1)^{j+1} \binom{k}{j}$

$$\text{Sečtením přes všechna } j: \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 1$$

kdybychom počítali od 0,
bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty.
Tahle chybí $(-1)^0 \binom{k}{0} = 1 \rightarrow$ vyjde -1

Druhý důkaz PIE (abstraktnější)

13

- zvolíme $A := \bigcup_i A_i$... každé $X \subseteq A$ přiřadíme charakteristickou funkci

$$c_X: A \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{t.j.} \quad c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$

- Vlastnosti char. funkcí:
 - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
 - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{X \cap Y}} = 1 - (1 - c_X)(1 - c_Y)$
 - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$
 $\uparrow$
 $A \setminus X$
 - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$

- Roznásobíme $\prod_{i=1}^n (1 + x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i$
 $\uparrow$
 proměnné
 dosaz. $x_i \leftarrow -x_i \rightarrow \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$

- Dosadíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:

$$\prod_{i=1}^n (1 - c_{A_i}) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} c_{A_i}$$

$$\underbrace{\prod_{i \in I} c_{A_i}}_{c_{\bigcap_{i \in I} A_i}} = 1 - c_{\bigcup_{i \in I} A_i}$$

pro $I \neq \emptyset$ je to $c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$
 pro $I = \emptyset$ je to 1

- Upravíme:
 (do podoby ještě bližší PIE)

$$1 - c_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$

- Nakonec sečteme přes všechna $a \in A$:

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad \dots \text{ejhle, PIE?}$$

Příbuzná otázka: Kolik pevných bodů má průměrně náhodná permutace?

Model pro podobné otázky:

Df. Náhodná veličina na pr. prostoru je funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \leftarrow$ třeba #1 při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jemu $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$

Df. Sřední hodnota $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega) \leftarrow$ vážený průměr (váhy = psti)
 $\leftarrow$ pro nekonečnou Ω nemusí existovat

$E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a \leftarrow$ nelekejte se nespočetné sumy - nejvyšší spočetné členy může být nenulových

! E není medián ! $\rightarrow$ většina lidí má nadprůměrný # rukou ∞
 $E[\#rukou] < 2 \Rightarrow P(\#rukou > E(\dots)) = 1 - \epsilon$

(14)

to je m t.j. $P(X < m) \leq 1/2$
 $P(X > m) \leq 1/2$

Příklad: 2 kostky, S = součet hodů: $E(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a) \cdot a = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \dots + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{36} \cdot 12$
 $\downarrow$ ale jde to počítat snáz

Věta (linearita střední hodnoty): Necht' X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

① $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

② $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

} důkaz rozepsáním dle definice

X = hodnota 1. kostky

Y = hodnota 2. kostky

} $E(X) = E(Y) = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$S = X+Y \rightarrow E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$

A zpět k Satnáře: $B := \#$ černých bodů (náh. veličina)

$B_1, \dots, B_n$: $B_i(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ pokud $\pi(i) = i$ } indikátor jestli "i je černý bod"

$B = \sum_i B_i \rightarrow E(B) = E(\sum_i B_i) = \sum_i E(B_i) \leftarrow E(B_i) = P(B_i=1) = \frac{1}{n}$
 $= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ještě 1 příklad na indikátory: Posloupnost n hodů mincí ... $\Omega = \{0,1\}^n$
 Chceme $E(\underbrace{\# \text{ úseků stejných hodnot}}_U)$

$U_1, \dots, U_n$... $U_i :=$ indikátor jestli "na pozici i začíná úsek"

U_1 je vždy 1 $\rightarrow E(U_1) = 1$

jinak $U_i \in \{0,1\}$ $p = 1/2 \rightarrow E(U_i) = 1/2$

$\uparrow$ i-tý hod se liší od (i-1)-tého

} $E(U) = \sum_i E(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$

GRAFY, CESTY, TAHY

15

Úloha: Mosty města Královce (a.k.a. Königsbergu / Kaliningradu) - Euler 1736
... nebo také kreslení domečku jedním tahem

↳ graf (matem. struktura) Df: (V, E) , kde V je množina vrcholů (konечná, neprázdná)
a $E \subseteq (V \times V)$ množina hran

↳ grafy jsou dobré modely (binárních) vztahů mezi nějakými objekty

Příklad: Náměstí spojená ulicemi, stany hlavnímu otd.

$e = \{u, v\}$ je
hrana mezi
vrcholy u, v
 $u \in E, v \in E$

• Cestování po grafu: posloupnost $v_0, e_1, v_1, e_2, v_2, \dots, e_n, v_n$
kde $\forall i \ v_i \in V, \forall j \ e_j \in E, \forall j \ e_j = \{v_{j-1}, v_j\}$

• Co se smí opakovat? ① celokiv $\rightarrow$ sled, ② nic $\rightarrow$ cesta, ③ jen vrcholy $\rightarrow$ tah

↳ hledáme eulerovský tah - to je takový, jenž obsahuje všechny vrcholy i hrany grafu

uzavřený
 $\equiv v_0 = v_n$

otevřený
 $\equiv v_0 \neq v_n$

to je také potřeba:

proč nestačí
posl. hran?

proč ne vrcholy?

Čto zatím naše
def. grafu
nedovoluje, ale
časem ji
rozebereme)

• Kritné podmínky pro existenci uzavřeného euler. tahu:

① graf musí "držet pohromadě": Df: Graf je souvislý $\equiv$
pro všechny $u, v \in V$
existuje cesta z u do v

Lemma: Pokud existuje sled z u do v , existuje i cesta z u do v .

Dk: Uvažme nejkratší sled z u do v . $\leftarrow$ nezapomenout ošetřit případ $u=v$.
Kdyby nebyl cestou, existuje nějaký vrchol t , který se v něm opakuje



tuto část můžeme odstranit
a tak získat kratší sled $\hookrightarrow$

② každý vrchol se účastní sudého počtu hran: Df: Stupeň vrcholu $\deg_G(v) = |\{e \in E(G) \mid v \in e\}|$

Uvažme uzavř. eul. tah T a všechny výskyty nějakého vrcholu v :



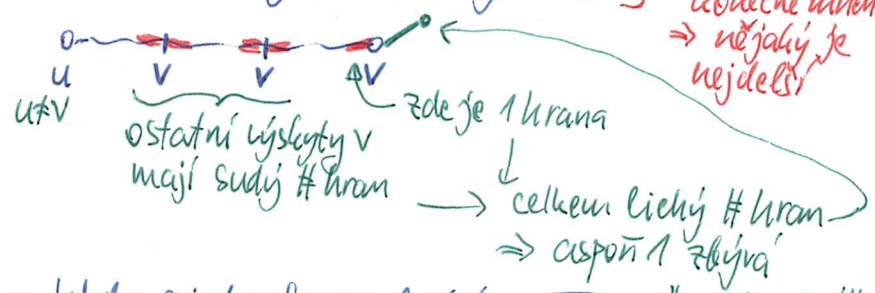
Každá hrana z vrcholu v leží před/zá výskytem $v \rightarrow$ dvojice hran.

Dvojice se nepřekrývají $\Rightarrow \# \text{hran} = 2 \cdot \# \text{dvojic}$, což je sudé.

Věta: Graf má uzavřený eulerovský tah $\Leftrightarrow$ je souvislý & všechny vrcholy mají sudé stupně.

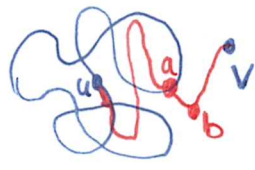
Důkaz: $\Rightarrow$ už máme hotové, zbývá $\Leftarrow$. Uvažme nejdelší možný tah T . ☹️ tah je konečně mnoho $\Rightarrow$ nějaký je nejdelší

① T je uzavřený: kdyby nebyl:



Tah můžeme prodloužit $\downarrow$

② T obsahuje všechny vrcholy ... kdyby existoval v neležící na T , $\Leftarrow$ "nenakreslený" vrchol vyberme libovolný u na T a najdeme cestu P z u do v (souvislost $\Rightarrow$ existuje).



Cesta P začíná na T , končí mimo $\Rightarrow$ někde je přechod... vyberme poslední $a \in P$, které leží na T a následníka $b \in P$, ten už na T neleží

$\left. \begin{array}{l} b \text{ může, ale nemusí být roven } v \end{array} \right\}$

- $\rightarrow b$ je nenakreslený a sousedí s nakresleným a hranou.
- $\rightarrow$ tah "rozeštrhneme" při libovolném příchodu a , přidáme hranu ab
- $\rightarrow$ získali jsme delší tah $\downarrow$

③ T obsahuje všechny hrany ... kdyby existovala nenakreslená hrana $\{u, v\}$, kde u, v jsou nakreslené vrcholy

- $\rightarrow$ tah rozeštrhneme v u a prodloužíme o hranu $\{u, v\}$
- $\rightarrow$ opět spor s maximalitou T $\downarrow$

$\nearrow$ může existovat 1 vrchol lichého stupně?

☹️ Co otevřené tahy? Souvislost & právě 2 vrcholy lichého stupně. (cvičení)

Grafy můžeme definovat orientované ... příklad: "ireverzibilní" tahy ve hrách, jednosměrné ulice

Df: Orientovaný graf je dvojice (V, E) , kde V je konečná množina vrcholů a $E \subseteq V^2$ množina hran (šipek). ☹️ lépe než nepříjemná přípusti směrů ☹️

- sledy, tahy, cesty zobecníme přímocare
- lemma sled $\rightarrow$ cesta stále funguje
- souvislost se komplikuje: a) silná souvislost $\equiv \forall u, v \in V \exists$ cesta $u \rightarrow v$ (orientovaná)

b) slabá souvislost $\equiv$ "zapomenutím orientace"

vznikne souvislý neorient. graf

☹️ silná $\Rightarrow$ slabá, ale ne opačně:



Podkladový graf
orient. grafu (V, E) je (neorientovaný) graf (V, E') t.j. $E' = \{ \{u, v\} \mid (u, v) \in E \vee (v, u) \in E \}$

- stupně se rozdělí na vstupní $\deg_{\text{in}}^G(v) := |\{ u \in V \mid (u, v) \in E \}|$ a výstupní $\deg_{\text{out}}^G(v) := |\{ w \in V \mid (v, w) \in E \}|$
- místo sudosti stupňů: Df: G je vyvážený $\equiv \forall v \in V(G) : \deg_{\text{in}}^G(v) = \deg_{\text{out}}^G(v)$.

Věta: Pro orientovaný graf G jsou následující tvrzení ekvivalentní:

(17)

- ① G je vyvážený a slabě souvislý.
- ② G obsahuje uzavřený eulerovský tah.
- ③ G je vyvážený a silně souvislý.

} Proto: pro vyvážené grafy je silná a slabá souvislost ekvivalentní

Dk: ① $\Rightarrow$ ③ ... snadná úprava důkazu neorientované verze věty

② $\Rightarrow$ ③ ... takéž

③ $\Rightarrow$ ① ... přímo z definice souvislosti

Souvislosti:

- najít eul. tah je snadné (algoritmicky)
- najít hamilton. cyklus je těžké

naštiní každý vrchol právě 1x

Cvičení: Jak vypadají grafy s otevřeným euler. tahem? (orientované)

Cvičení: Co kdyby mezi 2 vrcholy bylo více hran? (multigraf)

Příklad: Otvíráme sejt, hledáme posloupnost čísel, v níž se každé trojčíslí vyskytne aspoň jednou. (nebo obecně k -číslí...)

Zjednodušení: Dvojková soustava místo desítkové, $\rightarrow$ pro $k=2$ funguje 0110
posloupnost je cyklická.

☹ Je potřeba délka $\geq 2^k$... ukažeme, že tolik stačí.

Df: de Bruijnova posloupnost řádu k je cyklická posloupnost 0,1 délky 2^k
t.j. každý k -znakový řetězec 0,1 se v ní vyskytuje právě jednou.

$\hookrightarrow$ jako souvislá podposloupnost

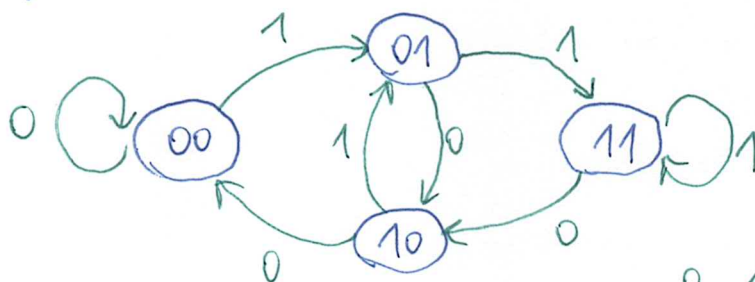
Věta: Pro každý řád $k \geq 1$ existuje dBP. řádu k .

Dk: Pro $k=1$ je věta triviální (posl. 01 je dBP.), ukažeme $k \geq 1$.

Sestrojíme orientovaný graf: $V := \{0, 1\}^{k-1}$

$$E := \{ (x_1 - x_{k-1}, x_2 - x_k) \mid x_1 - x_k \in \{0, 1\} \}$$

Příklad pro $k=3$:



- ☹ • $\deg^{\text{in}}(v) = 2$
- $\deg^{\text{out}}(v) = 2$
- graf je souvislý

} graf je vyvážený

$\Downarrow$
 $\exists$ uzavřený euler. tah

☹ když tah dojde do vrcholu $x_1 - x_{k-1}$
předchozích $k-1$ hran je určeno $x_1 - x_{k-1}$

$\hookrightarrow$ když chcí najít $x_1 - x_k$,
vyberu ten ze dvou výskytů $x_1 - x_{k-1}$,
po kterém následuje x_k .

$\hookrightarrow$ posl. 01011100 je dBP. řádu 3.

posloupnost
:= označení
hran
v pořadí
daném tahem

Cvičení: Rozšířte na libovolnou konečnou abecedu.