

Příklad: kartičky $\bar{C}, \bar{C}, \bar{C}, \dots$ podíváme se na náhodnou kartičku z náhodné strany.
Vidíme, že je $\bar{C}$. Jaká je pr., že druhá strana je také $\bar{C}$?

Jak vypadá pr. prostor? $\Omega = \{ \bar{C}\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, \bar{C}\bar{C}, \bar{C}\bar{C} \}$, P klasická

↓ zobecnění

nastala 1 z těchto 3 možností, všechny stejně pravděpodobné
... ale jen ve 2 z nich je druhá strana $\bar{C}$
 $\Rightarrow pr = 2/3$.

Def: Podmíněná pr. jevu A za podmínky jevu B je $P(A|B) := P(A \cap B) / P(B)$.



$A \cap B$ je jev v podprostoru B , dělení $P(B)$ smysluplné, aby se sečetly na 1. ↑ potřebujeme $P(B) \neq 0$.

☹ A, B jsou nezávislé $\Leftrightarrow P(B) = 0$ nebo $P(A|B) = P(A)$.] to, jestli nastalo B , nijak neovlivní $P(A)$.

Příklad: Házíme kostkami X, Y . Jaká je pr., že $|X - Y| = 1$? jevu S - "sousedi"

① Pokud $X \in \{1, 6\}$, pak je $P(|X - Y| = 1) = 1/6 \dots P(S|E) = 1/6$ jevu E - "extrémní" víme $P(S \cap E) = P(S|E) \cdot P(E) = 1/18$
 $P(S \cap \bar{E}) = P(S|\bar{E}) \cdot P(\bar{E}) = 2/9$

② Jinak: $P(S|\bar{E}) = 2/6 = 1/3$

ale: $P(S \cap E) + P(S \cap \bar{E}) = P(S)$ neboť $S \cap E, S \cap \bar{E}$ je rozklad S na disj. podmnožiny
 $\frac{1}{18} + \frac{4}{18} = \frac{5}{18}$

→ vážený průměr případů, váhy jsou jejich psti.

Věta: (o úplné pravděpodobnosti, též o rozboru případů).

Nechť $A \subseteq \Omega$, $B_1, \dots, B_k \subseteq \Omega$ je rozklad Ω ($B_i \cap B_j = \emptyset$ pro $i \neq j$, $\forall B_i \neq \emptyset$, $\bigcup B_i = \Omega$)
t.č. $\forall i: P(B_i) > 0$.

Pak $P(A) = \sum_i P(A|B_i) \cdot P(B_i)$.

Příklad: Test na nemoc (nebo třeba na spam).

Jevy N = "je nemocný"

T = "test vyšel pozitivně"

Z laboratoře víme:

$P(T|N) = 0.95$ Ale: 0.95
 $P(T|\bar{N}) = 0.03$ 0.03
nač $P(N) = 0.06$ 0.001

$\rightarrow P(T \cap N) = P(T|N) \cdot P(N) = P(N|T) \cdot P(T)$

$\Rightarrow P(N|T) = \frac{P(T|N) \cdot P(N)}{P(T)} = \frac{0.95 \cdot 0.06}{0.0852} \approx 0.67 \approx 0.0307$

přičemž $P(T)$ spočítáme rozborem případů:

$P(T) = P(T|N) \cdot P(N) + P(T|\bar{N}) \cdot P(\bar{N}) \approx 0.0852$
 $0.95 \cdot 0.06 + 0.03 \cdot 0.94 = 0.0309$

↓ opět zobecníme

Věta (Bayesova): Pro $A \subseteq \Omega$ jev

a $B_1, \dots, B_k$ rozklad Ω
t.č. $\forall i: P(B_i) > 0$:

$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_j (P(A|B_j) \cdot P(B_j))}$

Hádanka: Hráč A napíše na 100 karet různá celá čísla, v náhodném pořadí je ukazuje hráči B.

"problém najímání sekretářky" (11)

Hráč B může po lib. kartě říci STOP a vyhrává, pokud stopnul na max. čísla. Jakou má zvolit strategii?

↳ pokus: prohlédneme si prvních 50 a pak zastavíme na 1. větší

☹️ strategie uspěje např. tehdy, je-li 2. největší v 1. polovině a největší v 2. polovině
Spočítejme, jakou to má pr:

$$\frac{50 \cdot 50 \cdot 98!}{100!} = \frac{50 \cdot 50}{100 \cdot 99} = \frac{25}{99} = 0.\overline{25} > 1/4$$

} celkově je tedy
pr. úspěchu $> 1/4$

• Jak spočítat pr. úspěchu přesně? vyjde cca 0.349

• Je dělení na 50 + zbytek optimální? pro zjednoduš. výpočet ano,
pro přesný je lepší 57 + zbytek $\rightarrow pr \approx 0.371$

Hádanka #2: Jak pomocí falešné mince simulovat pravou?

PRINCIP INKLUZE A EXKLUZE

Příklad: "Problém Sekretářky" - n páni si uloží klobouky do šatny, sekretářka jim je vydá v náhodném pořadí. Jaká je pravděpodobnost, že nikdo nedostal svůj klobouk?

↳ Pr. prostor Ω : permutace $\pi: [n] \rightarrow [n] \leftarrow$ značí se S_n

pán dostal svůj klobouk: $\pi(i)=i \leftarrow$ pevný bod permutace

My chceme $P(\{\pi \in \Omega \mid \forall i \pi(i) \neq i\}) \leftarrow P(\text{náhodná permutace nemá pevný bod})$

↳ Uvažujme malé případy:

$n=0$
prázdná šatna
nemá pevný bod
 $\rightarrow P=1$

$n=1$
1 x
 $P=0$

$n=2$
12 x
21 ✓
 $P=1/2$

$n=3$
123 x
132 x
213 x
231 ✓
312 ✓
321 x
 $P = \frac{2}{6} = 1/3$

$n=5$
21453 } 2 rozšíření
21534 } prefixu 21
23154 } ale prefix 23
23451 } má 3 rozšíření
23514 }

• Pokus: pro $n=3$ počítáme "špatné" permutace (s pevným bodem):

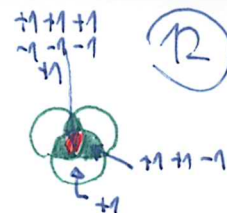
1xx ... 2
x2x ... 2
xx3 ... 2

} ale třeba 12x jsme započítali 2x
 $\rightarrow$ odečteme $12x(1), 1x3(1), x3(1)$

-- ale 123 jsme nezapočítali vůbec $\rightarrow +1$

↳ volby na jednotlivých pozicích se netriviálně ovlivňují

- To je vlastně: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ 
- $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$



↓ zobecníme pro n množin

Věta (Princip inkluze a exkluze) Pro konечné množiny $A_1 - A_n$ platí:

$$\left| \bigcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{j}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

[Dokážeme za chvíli ... teď zpět k šatnářce]

Alternativně:

$$\left| \bigcup_i A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

- $A_1 - A_n$: $A_i := \{ \pi \in S_n \mid \pi(i) = i \}$ ← i je pevný bod

- $A := \bigcup_i A_i$ ← mají aspoň 1 pevný bod ... zajímá nás tedy $|A|$ (přesněji řečeno $n! - |A|$)

- pro PIE potřebujeme: $|A_i| = (n-1)!$

$$|A_i \cap A_j| = (n-2)!$$

⋮

$$\text{průnik } k \text{ množin: } (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{I \in \binom{[n]}{k}} (n-k)!$$

$\binom{n}{k}$ stejných členů

$$\rightarrow S = \frac{n!}{k!} \cdot (n-k)!$$

$$|A| = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! \left(\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right) = n! \left(1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \pm \frac{1}{n!} \right)$$

$$P(\pi \text{ má pevný bod}) = P(A)$$

- Nás zajímá jev opačný: $P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \pm \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$

👁 Pro $n \rightarrow \infty$ konverguje $P(\bar{A})$ k $\frac{1}{e}$

Důkaz PIE: Pro prvek $x \in \bigcup_i A_i$ ověříme, že jsme ho započítali právě jednou.

Nechť $k := \# A_i$, v nichž se vyskytuje x ← $\# A_i : x \in A_i$

Průniky k množin $\rightarrow 1 \cdot x$ → přispěje $(-1)^{k+1}$

$j > k$ množin $\rightarrow 0 \cdot x$

$j < k$ množin $\rightarrow \binom{k}{j}$ j -tic obsahuje x → celkem přispěje $(-1)^{j+1} \binom{k}{j}$

$$\text{Sečtením přes všechna } j: \sum_{j=1}^k (-1)^{j+1} \binom{k}{j} = - \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} = 1$$

kdybychom počítali od 0,
bylo by to $(1-1)^k$ podle Binom. věty.
Tahle chybí $(-1)^0 \binom{k}{0} = 1 \rightarrow$ vyjde -1

Druhý důkaz PIE (abstraktnější)

13

- zvolíme $A := \bigcup_i A_i$... každé $X \subseteq A$ přiřadíme charakteristickou funkci

$$c_X: A \rightarrow \{0, 1\} \quad \text{t.j.} \quad c_X(a) = \begin{cases} 0 & a \notin X \\ 1 & a \in X \end{cases}$$

- Vlastnosti char. funkcí:
 - $c_{X \cap Y} = c_X \cdot c_Y$
 - $c_{X \cup Y} = c_{\overline{X \cap Y}} = 1 - (1 - c_X)(1 - c_Y)$
 - $c_{\overline{X}} = 1 - c_X$
 - $|X| = \sum_{a \in A} c_X(a)$

• Roznásobíme $\prod_{i=1}^n (1 + \underbrace{x_i}_{\text{proměnné}}) = \sum_{I \subseteq [n]} \prod_{i \in I} x_i$ dosaz. $x_i \leftarrow -x_i$ $\rightarrow \prod_{i=1}^n (1 - x_i) = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \prod_{i \in I} x_i$

• Dosadíme $x_i \leftarrow c_{A_i}$:

$$\underbrace{\prod_{i=1}^n (1 - c_{A_i})}_{c_{\bigcap_i \overline{A_i}}} = \sum_{I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \underbrace{\prod_{i \in I} c_{A_i}}_{\text{pro } I \neq \emptyset \text{ je to } c_{\bigcap_{i \in I} A_i}} = 1 - c_{\bigcup_i A_i}$$

pro $I = \emptyset$ je to 1

- Upravíme:
(do podoby ještě
bližší PIE)

~~$$1 - c_{\bigcup_i A_i} = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} c_{\bigcap_{i \in I} A_i}$$~~

- Nakonec sečteme
přes všechna $a \in A$:

$$|\bigcup_i A_i| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|+1} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| \quad \dots \text{ejhle, PIE?}$$

Příbuzná otázka: Kolik pevných bodů má průměrně náhodná permutace?

Model pro podobné otázky:

Df: Náhodná veličina na pr. prostoru je funkce $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ← třeba #1 při n hodech kostkou

- $P(X \leq 1)$ je vlastně P jemu $\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq 1\}$

Df: Střední hodnota $E(X) := \sum_{\omega \in \Omega} P(\omega) \cdot X(\omega)$ ← vážený průměr (váhy = psti)

 $E(X) = \sum_{a \in \mathbb{R}} P(X=a) \cdot a$ ← nelekejte se nespočetné sumy - nejvyšší spočetné členy může být nenulových

! E není medián ! $\rightarrow$ většina lidí má nadprůměrný #rukou ∞
 $E[\#rukou] < 2 \Rightarrow P(\#rukou > E(\dots)) = 1 - \epsilon$

(14)

to je m t.j. $P(X < m) \leq 1/2$
 $P(X > m) \leq 1/2$

Příklad: 2 kostky, S = součet hodů: $E(S) = \sum_{a=2}^{12} P(S=a) \cdot a = \frac{1}{36} \cdot 2 + \frac{2}{36} \cdot 3 + \dots + \frac{6}{36} \cdot 7 + \frac{5}{36} \cdot 8 + \dots + \frac{1}{36} \cdot 12$
 $\downarrow$ ale jde to počítat snáz

Věta (linearita střední hodnoty): Necht' X, Y jsou náhodné veličiny a $\alpha \in \mathbb{R}$. Pak:

① $E(\alpha \cdot X) = \alpha \cdot E(X)$

② $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$

} důkaz rozepsáním dle definice

X = hodnota 1. kostky

Y = hodnota 2. kostky

} $E(X) = E(Y) = \frac{1}{6} (1+2+\dots+6) = \frac{21}{6} = \frac{7}{2}$

$S = X+Y \rightarrow E(S) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 2 \cdot \frac{7}{2} = 7$

A zpět k Satnáře: $B := \#$ černých bodů (náh. veličina)

$B_1, \dots, B_n$: $B_i(\pi) = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases}$ pokud $\pi(i) = i$ } indikátor jestli "i je černý bod"

$B = \sum_i B_i \rightarrow E(B) = E(\sum_i B_i) = \sum_i E(B_i) \leftarrow E(B_i) = P(B_i=1) = \frac{1}{n}$
 $= n \cdot \frac{1}{n} = 1.$

Ještě 1 příklad na indikátory: Posloupnost n hodů mincí ... $\Omega = \{0,1\}^n$
 Chceme $E(\underbrace{\# \text{ úseků stejných hodnot}}_U)$

$U_1, \dots, U_n$... $U_i :=$ indikátor jestli "na pozici i začíná úsek"

U_1 je vždy 1 $\rightarrow E(U_1) = 1$

jinak $U_i \in \{0,1\}$ $p = 1/2 \rightarrow E(U_i) = 1/2$

$\nwarrow$ i-tý hod se liší od (i-1)-tého

} $E(U) = \sum_i E(U_i) = 1 + \frac{n-1}{2} = \frac{n+1}{2}$