

PRAVDĚPODOBŇNOST

(8)

"Pravděpodobnost, že na kostce padne 6, je rovna $1/6$." - Co to vlastně znamená?

- Empirický pohled: když budu kostkou házet dostatečně dlouho,
 $\#6 / \# \text{ pokusů}$ se bude blížit $1/6$
- Matematický model náhody: $\text{pravděpodobnost} = \frac{\# \text{ výsledků pokusu, kde jev nastane}}{\# \text{ možných výsledků pokusu}}$
 $\hookrightarrow$ první pokus, časem vylepšíme

začneme příklady...

① kostka ... 6 možných výsledků ... $P(\text{padne } 6) = 1/6$

$$P(\text{padne sudé}) = 3/6 = 1/2$$

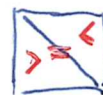
$$P(\text{padne prvočíslo}) = 2/6 = 1/3$$

② dvě kostky ... $6^2 = 36$ výsledků ...
 (rozlišitelné, třeba červená a modrá)

$$P(\text{na červené padne } 6) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{na obou padne totéž}) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$P(\text{červená} > \text{modrá}) = \frac{36-6}{2 \cdot 36} = \frac{15}{72} = \frac{5}{24}$$



③ narozeninový paradox

30 lidí v místnosti

předpokládáme, že narozeniny padnou
 na každý den stejně často
 a že rok má 365 dní

$P(\text{existuje dvojice s narozeninami v tentýž den})$

$$= 1 - P(\text{všichni mají různé narozeniny}) = 0.706$$

$$\frac{365 \cdot 30}{365 \cdot 30} = 0.294$$

$\hookrightarrow$ možné výsledky posloupnosti délek 30 z $\{1 \dots 365\}$

④ žalásná kostka - 6 padne s pětí $1/2$, 1...5 s pětí $1/10$

$$P(\text{padne sudé}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

Zobecníme: Df: Diskrétní pravděpodobnostní prostor se skládá z:

• Ω : konečná nebo spočetná množina elementárních jevů (možné výsledky pokusu)

• $p: \Omega \rightarrow [0,1]$ funkce přiřazující elem. jevům jejich pravděpodobnost

$$\text{t.j. } \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$$

Df: Je-li $A \subseteq \Omega$, přiřadíme mu pravděpodobnost $P(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega)$

☺ striktně vzato, elem. jev není jev ... ale můžeme ztotožnit $\omega \in \Omega$ s $\{\omega\}$.

Typické případy: • konečný pr. prostor: Ω konečná

• klasický pr. prostor: $\forall \omega \in \Omega: p(\omega) = \frac{1}{|\Omega|}$

⑤ Příklad, na který naše definice nestačí:



Kapky deště dopadají náhodně
 na stůl. Jaka je pr., že kapka
 dopadne do mísky?

Základní obraty: Pro jevy $A, B \subseteq \Omega$:

- $\bar{A} := \Omega \setminus A$... doplněk jevu / jev opačný: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- $A \cup B$... nastane A nebo B:
 - pokud $A \cap B = \emptyset$, pak $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
 - obecně $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- pokud $A \subseteq B$, pak $P(A) \leq P(B)$
- $A \cap B$...? platí $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$? Jen někdy (viz úvodní příklady)

1 kostka: "padlo sudé" a "padlo dělitelné 3" } je
 1 kostka: "padlo sudé číslo" a "padlo prvočíslo" } není
 2 kostky: "na 1. padla 6" a "na 2. padla 6" } je

Df: Jevy A, B jsou nezávislé, pokud $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

Příklad: 32 karet, náhodně zamícháme ($\Omega =$ všechny permutace karet) $\{1, \dots, 32\}$

$A =$ "na 1. místě je 1" ... formálněji: $A = \{\omega \in \Omega \mid \omega(1) = 1\}$ $P(A) = \frac{1}{32}$
 $B =$ "na 2. místě je 2" $P(B) = \frac{1}{32}$
 $P(A \cap B) = \frac{30!}{32!} = \frac{1}{31 \cdot 32} \neq P(A) \cdot P(B) \rightarrow$ závislé

Příklad: Dvojice pokusů: $(\Omega_1, P_1), (\Omega_2, P_2) \rightarrow (\Omega, P)$, kde $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, $P((a, b)) = P_1(a) \cdot P_2(b)$

Ověříme, že součet = 1: $\sum_{a \in \Omega_1} \sum_{b \in \Omega_2} P_1(a) P_2(b)$
 $= \sum_{a \in \Omega_1} \left(P_1(a) \cdot \underbrace{\sum_{b \in \Omega_2} P_2(b)}_1 \right) = \sum_{a \in \Omega_1} P_1(a) = 1$.
 ↑ kartézský součin $= \{(a, b) \mid a \in \Omega_1, b \in \Omega_2\}$ } Součin
 prostních
 prostorů

Jev $A \subseteq \Omega_1$: rozšíříme na $A' = A \times \Omega_2$... $P(A \times \Omega_2) = P_1(A)$

Jev $B \subseteq \Omega_2$: — " — $\Omega_1 \times B$... $P(\Omega_1 \times B) = P_2(B)$

👁️ $P(A' \cap B') = P(A') \cdot P(B')$

$\rightarrow$ jevy týkající se různých pokusů v sadě jsou nezávislé.

$\hookrightarrow$ můžeme zobecnit na posloupnost více pokusů ... jak se pak chová nezávislost?

Df: Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou po k nezávislé $\equiv \forall I \in \binom{[n]}{k} : P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i)$

nejdříve si
představíme $k=2$

všechny k-prvkové
podmnožiny
indexů

Jevy $A_1, \dots, A_n$ jsou nezávislé $\equiv$ jsou po k nezávislé pro všechna $k \in \{2, \dots, n\}$.

Příklad: $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$, P klasická

$A = \{10, 11\}$ (první je 1) $P(A) = 1/2$

$B = \{01, 11\}$ (druhá je 1) $P(B) = 1/2$

$C = \{00, 11\}$ (#1 sudý) $P(C) = 1/2$

$\Rightarrow A, B, C$ nejsou nezávislé

Dvojice: $A \cap B = \{11\}$, $P(A \cap B) = 1/4 = P(A) \cdot P(B)$

$A \cap C = \{11\}$, $P(A \cap C) = 1/4$

$B \cap C = \{11\}$, $P(B \cap C) = 1/4$

po 2
nezávislé

Trojice: $A \cap B \cap C = \{11\}$, $P(A \cap B \cap C) = 1/4$

ale $P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 1/8$

po 3 nejsou
nezávislé