

Věta (Erdős-Šzekeresová): Postoupnost délek (alespoň) $(r-1)(k-1)+1$ obsahuje rostoucí pp. délky r nebo klesající pp. délky k

(5)

Dle: pro $x_1 \dots x_n$

def. (a_i, b_i) , kde $a_i :=$ délka nejdelší rostoucí pp končící prvkem x_i
 $b_i :=$ — " — klesající — " —

Sporem: pokud $\exists$ dost dlouhá pp., je vždy $1 \leq a_i \leq r-1$, $1 \leq b_i \leq k-1$
 $\Rightarrow (r-1)(k-1)$ možných hodnot dvojice, ale $n > (r-1)(k-1)$

Tedy podle principu holubůvek $\exists i, j$: $i < j$, $(a_i, b_i) = (a_j, b_j)$

To ale není možné: Buď $x_i < x_j$, ale pak $a_j \geq a_i + 1$
 nebo $x_i > x_j$, — " — $b_j \geq b_i + 1$ $\downarrow$

Přidávky

- Neexistují dvě mocniny 2 lišící se jen pořadím cifer.
- Wilsonova věta: n je prvočíslo $\Leftrightarrow (n-1)! + 1$ je dělitelné n
- Čínská zbytková věta (díky holubůvkám)
- 3 doměty a 3 studny

KOMBINATORIKA

- KOLIK JE OBJEKTŮ DANÉHO DRUHU?

Příklady:

- ① # slov o 8 písmenech z $\{a-z\} = 26^8 \leftarrow 26 \text{ znaků Angl. abecedy} \leftarrow 2 \text{ písmenka} \leftarrow \begin{matrix} 26 \\ \text{řádků} \end{matrix} \leftarrow \text{pak pokračujeme indukci}$
- ② ... všechna písmena různá: $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 19 = 26^{\underline{8}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{8 \text{ členů}}$
- ③ # přesmyček slova KRUTOVLADCE = $11^{\underline{11}} = 11!$ $\leftarrow$ jiný lepší příklad: ZPRACHNIVĚLOST
 či ZUBOLEKARSTVI (nejdelší roztomilá bez opakování)
- ④ # přesmyček slova JEZEVEC ... nejdrůbež JEZEVEC = $7!$
 • 3! = 6 způsobů, jak E-čka očíslovat $\Rightarrow$ # přesmyček $\cdot 3! = 7!$
 $\Rightarrow$ # přesmyček = $\frac{7!}{3!}$

$\hookrightarrow$ technika počítání dvěma způsoby

př. 5) # rozestavení 8 věží na šachovnici 8×12 aby se neohrožovaly. (6)
 ... v každém sloupci právě 1 věž: posloupnost $r_1 - r_8 \in \{1-12\}$
 (vlastně slovo nad 12-znakovou abecedou)
 a všechna r_i jsou navzájem různá $\rightarrow 12^8$ možností

Jiný pohled: hledám funkce, které přiřazují sloupcům řádky: $f: \{1-8\} \rightarrow \{1-12\}$
 neboli zobrazení

6) co kdyby věží bylo jen 5?

Nejprve si je odčíslyme: 8^5 možností, jak vybrat sloupce
 12^5 možností, jak nezávisle vybrat řádky } $8^5 \cdot 12^5$ rozestavení

A pak vydělíme $5!$.

Zobecníme: # k -znakových slov z n -znakové abecedy = n^k
 ... bez opakování = $n^{\underline{k}}$ co se stane pro $k=0, n=0$,
 případně $k > n$?
 # pořadí abecedy (permutací) = $n! = n!$
 # neuspořádaných k -tic vybraných z n prvků = $\frac{n^{\underline{k}}}{k!}$

funkcí z $\{1-k\}$ do $\{1-n\}$
 # prostých funkcí
 # bijekcí z $\{1-n\}$ do $\{1-n\}$
 $\uparrow$ také se jím říká permutace

Princip kódování: Kolik podmnožin má množina $1 \dots n$? (malý případ: $n=2, n=3$)

Podmnožinu popíše charakteristickou posloupností $c_1 - c_n \in \{0, 1\}$
 $\uparrow A \subseteq \{1-n\}$ $\uparrow c_i = \begin{cases} 0 & \text{if } i \notin A \\ 1 & \text{if } i \in A \end{cases}$

podmnožin = # posloupností = 2^n Příklad pro $n=2$: $\emptyset \rightarrow 00, 01, 10, 11$
 známení: $2^X = \mathcal{P}(X)$
 vlastně mám bijekci mezi podmnožinami a posloupnostmi $\Rightarrow$ je jich stejně

Jiný pohled: charakt. funkce $\{1-n\} \rightarrow \{0, 1\}$

Argument bijekci: Necht' $\mathcal{Y} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je sudý}\}$ $\leftarrow$ "sudé a liché podmnožiny"
 a $\mathcal{X} := \{A \subseteq \{1-n\} \mid |A| \text{ je lichý}\}$

Ukažeme bijekci mezi $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X} \Rightarrow |\mathcal{Y}| = |\mathcal{X}| \Rightarrow$ jelikož $|\mathcal{Y}| + |\mathcal{X}| = 2^n$, musíme oba být 2^{n-1} .

Zvolíme $a \in [n]$, množině X přiřadíme $X \mapsto \{a\} \cup X = \{x \cup \{a\} \mid \text{pokud } a \notin x\}$
 $\uparrow$ symetrický rozdíl

Pro liché n funguje jako bijekce doplněk. Ale co pro sudé n ?

$\hookrightarrow$ sudé množině přiřadím lichou a naopak
 inverze sama k sobě $\Rightarrow$ je to bijekce mezi $\mathcal{Y}$ a $\mathcal{X}$

Počítáme k -prvkové podmnožiny $[n]$ - to jsou vlastně neuspořádané k -tice z $[n]$

$\Rightarrow$ je jich $\frac{n^{\underline{k}}}{k!} \leftarrow$ takže značíme $\binom{n}{k}$ "n nad k" - kombinační číslo
 též značíme jako $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ což je totéž (ale pozor na případ $k > n$)
 neboli binomický koeficient

V char. posloupnostech: posl. 0/1 délky n , v nichž je právě k jedniček
 to by také šlo počítat jako přesmyčky slov $\underbrace{1-1}_{k} \underbrace{0-0}_{n-k}$

Vlastnosti kombinačních čísel

$$\binom{n}{0} = 1 \quad \binom{n}{1} = n \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \binom{n}{n} = 1 \quad \binom{n}{n-1} = n \rightarrow \text{obecně } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{rozkládáme (pod) množiny podle \# prvku}$$

počítáme prvky, co nejsou v množině

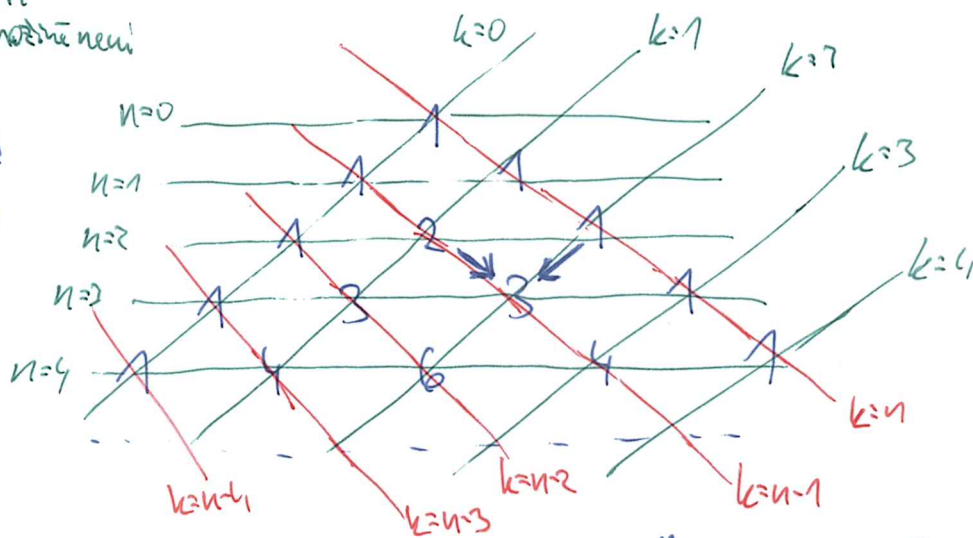
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

prvek n
v podmnožině není

je tam

kombinatorický argument (šlo by též upočítat z definice)

Pascalův Δ (tabulka $\binom{n}{k}$)



Vše je vidět zde

Binomická věta: $\forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}: (x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$ } také můžeme chápat jako rovnost polynomů ve 2 proměnných

Důkaz: Roznásobujeme $(x+y)(x+y) \dots (x+y) = \underbrace{xxx\dots x + xx\dots xy + \dots + y\dots y}_{n \text{ závorek}}$
 $\forall$ člen si z n závorek vybere x nebo y
 $\Rightarrow 2^n$ členů, ale všechny jsou tvaru $x^{n-k} y^k$

Kolik členů je tvaru $x^{n-k} y^k$? Máme z n závorek k -krát vybrat $y \rightarrow \binom{n}{k}$.

Otázka: Jak vypadá multinomialní věta? Treba $(x+y+z)^n$?

Příklady: $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$... už známe

$$0 = (1-1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} (-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + \dots \binom{n}{n}$$

pro $n > 0$

sudých a lichých podmnožin je stejné

Další zajímavá číselní?

Rozklady na součet: kolika způsoby lze n zapsat jako $x_1 + x_2 + \dots + x_k$ ($\forall x_i \in \mathbb{N}$)
 na pořadí nám záleží

Umísťujeme n nerozlišitelných kuliček do k rozlišitelných (očíslovaných) přihrádek.
 Kódování: posloupnost $\bullet$ a $|$ (krajní u počítání) $\Rightarrow n+k-1$ pozic, k z nich je $|$
 $\Rightarrow$ lze vybrat $\binom{n+k-1}{k}$ způsobů.