Dynamické lineární uspořádání

List Order Problem – Chceme udržovat posloupnost prvků
- Operace: • Insert nového prvku za zadaný
  • Compare – zjistí, zda je x před y … chceme v $O(1)$
  • možná také Delete (lze via glob. přestavba)

↓ řeší se pomocí

List Labelling – Posloupnost prvků, každému přidělena značka, značky rostou zleva doprava
- Insert, Delete mohou přeznačovat

① exponenciální rozsah značek, předem víme max. # prvků M
- první prvek dostane 2^M
- druhý buď 0 nebo 2^{M+1}
- každý další je průměr sousedů

} nikdy není třeba přeznačovat, lze $O(1)$ w.c.

jednodušeji: nejprve vybereme zarážky na 0 a 2^{M+1}, ostatní prvky se ukládají vždy někam mezi ně

↓ použitelné pro $M \in O(\text{word size})$

② polynomiální rozsah značek (s prvky v ext. vrcholech)
- BVS, značka = pos. L/P na cestě z kořene do prvku – $\Theta(\log n)$ bitů → poly rozsah
- BB-α stromy přepočítávají značky během rekonstrukcí → $\Theta(\log n)$ amort. na Ins/Del
  ↳ pozor, rotace jsou drahé!

③ Lineární rozsah – Ordered File Maintenance → poradíme si $O(\log^2 n)$ amort.
(neboli Packed Memory Array)

lze zvýšit indirekcí: bloky velikosti $\Theta(\log n)$, v nich ①
② nad bloky ($\Theta(n/\log n)$ bloků)

Insert v ① způsobí $O(1/\log N)$ amort. operací ve ②
stojí $O(1)$ amort.
⇒ ② stojí $O(1)$ amort., ① taktéž.

label je dvojice, porovnáváme lexikograficky → Compare v $O(1)$ w.c.

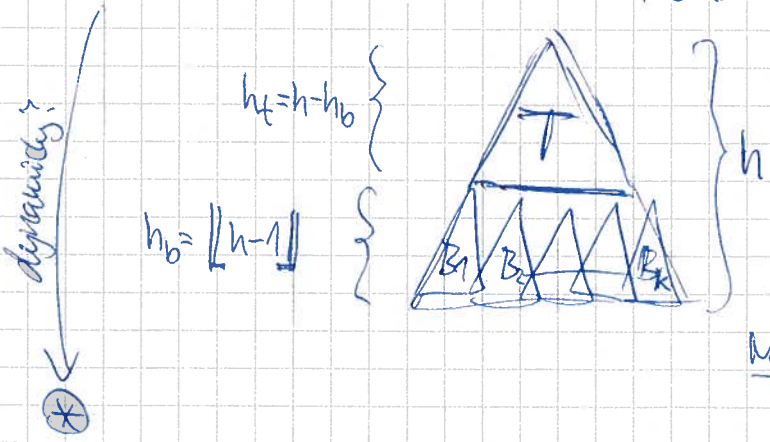
[pozor, 1 změna ve ② může $\Theta(\log n)$ dvojic, ale to lze udělat najednou]

Cache-Oblivious datové struktury

- I/O model, parametry B (velikost bloku), M (velikost cache)
- c/o model – parametry neznáme, cache se obsluhuje optimálně

} Dílko počítáme jen čtení

- cache-aware (I/O): (a,b)-strom s $a,b \in \Theta(B)$ → $\Theta(\log n / \log B)$ I/O na operaci
- cache-oblivious: statický úplný BVS ve van Emde-Boasově uložení



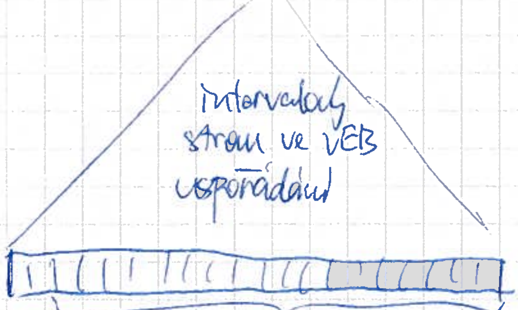
Nejprve T_1, pak B_1 – B_{k+1} lze rekurzivně

Věta: Průchod kořen–list vyžaduje $\Theta(\log_B N)$ I/O

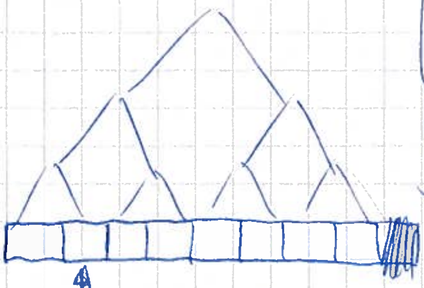
Náčrtek Dk: "zaostříme" na úroveň rozkladu, kdy se strom poprvé vejde do blíčku
→ má hloubku $\Theta(\log B)$
⇒ na cestě takových průchodů $\Theta(\log n / \log B)$

⊛ ↳ zkřížíme Ordered File s vEB uspoř. BVS:

- Find je platí v rámci stromu
- Insert vloží do OF, to způsobí přečíslování nějakého intervalu klíčů ⇒ dávkový update stromu



Ordered File:



čistě konceptuální úplný bin. strom

vnitřní vrchol ≃ interval → každý interval má kapacitu $\log n \cdot 2^{h-i}$ (h = hloubka stromu, i = hloubka vrcholu)

a hustotu ϱ = #prvků / kapacita

Standardní hustota $\left[\frac{1}{2} - \frac{i}{4h}, \frac{3}{4} + \frac{i}{4h}\right]$

v kořeni ($i=0$) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$
v listech ($i=h$) $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$
čím výš, tím přísnější

Insert (Delete analogicky):

- vložím do příslušného kusu ($O(\log n)$, úplně ho přepíši)
- pokud má stále std hustotu, končím, jinak jdu nahoru a hledám první interval se std hustotou
  - najdu → přerozdělím celý interval rovnoměrně
  - nenajdu → ~~zdvojnásobím~~ strukturu → zvětším c-krát pro nějaké $c \in (1,2)$ [vyjde to pro $c = 6/5$] ↳ chci hustotu $\frac{1/2+3/4}{2} = \frac{5}{8}$
  - upravuji konst. ve velikosti kusu tak, aby #kusů stoupal po mocninách dvojky

Amortizace: Nechť přerozdělujeme interval v hloubce i, který má kapacitu K.

Jeho ~~...~~ $\varrho \le \frac{3}{4} + \frac{i}{4h}$, alespoň 1 syn má $\varrho > \frac{3}{4} + \frac{i+1}{4h}$

↳ ~~...~~ po minulém přerozdělení otec měl ϱ stejnou jako otec ⇒ vzrostla o alespoň $1/4h$ ⇒ v podstromu přibylo alespoň $\Theta(K/h)$ prvků

Přerozdělení stojí $\Theta(K)$
⇓
Účtujeme $\Theta(h) \le O(\log n)$ jednomu prvku
⇓
∀ prvek přispěje na přerozdělování v celkem $\log n$ úrovních, tedy celkově $O(\log^2 n)$

zvlášť amortizuji změny velikosti celé struktury

! velikost kusu nastavíme tak, aby se změna hustoty o $1/4h$ projevila přidáním/ubráním aspoň 1 prvku ☺ ... i po zapodění

tudíž velikost bloku bez může $\log n$ a $8 \log n$

☺ Nemusíme si pamatovat počty prvků v podstromech – stihneme to ve stejném čase počítat po 1

Cache-oblivious: Hledání intervalu + přerozdělování prvků jsou 2 prolozené scany (popředu + pozpátku) ⇒ $O(K/B)$ bloků, $O(\log^2 n / B)$ na prvek.

Zpět k C/O strukturám

Insert: $O(\log^2 n)$ času, $O(\log^2 n / B)$ I/O na update OFM
+ $O(\#\text{umístěných prvků v OFM}/B + \log n/\log B)$ na dávkový update VEB → amortizováno se schová do ceny OFM + $\log n/\log B$

Find: $O(\log n)$ času, $O(\log n / B)$ I/O na VEB

Zrychlení … jako obvykle indirekcí se Fragmenty velikosti $F = \Theta(\log n)$, nad jejich reprezentanty původní struktura

- umístit fragmenty vše v čase $O(\log n)$ a $O(\log n / B)$ I/O
- jednou za amort. $O(1/F)$ operací provedeme $O(1)$ operací na pův. struktuře
  ⇒ jedna stojí amort. $O(\log n)$ času a $O(\log n / \log B)$ I/O
  [$\log n/B$ z OFM + $\log n/\log B$ z VEB]
- dotazy: nejprve ve VEB, pak sekvenčně $\lceil \log n \rceil$ fragmentů: $O(\log n)$ času, $O(\log n / \log B)$ I/O
- jednou za čas globální přestavba, abychom udrželi $F = \Theta(\log n)$ apod.

→ Asymptoticky stejně rychlé jako C/A B-stromy, ale je to C/O.