Stromy a jejich reprezentace

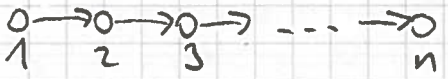
Motivace: verifikace / sensitivita min. kostry → problém cestných maxim

Cíl: Navrhnout DS pro stromy, které bude umět dotazy na cesty...

(vzdálený)

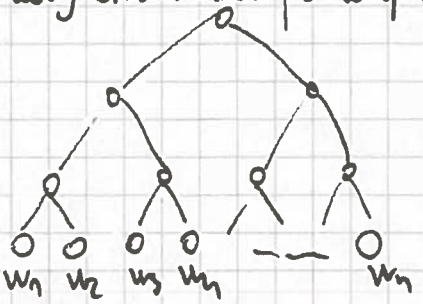
- ohodnocení (váhy) třeba ve vrcholech
- dotazy: "vyjmenuj vrcholy na cestě x→y" (to nejspíš nepůjde rychle)
  "najdi nejlehčí vrchol na cestě x→y" (to už půjde) – cestové minimum ↑ nebo nějaká jiná asociativní operace
- změny: váha vrcholu – bodový update
  "zvýš o δ všechny váhy na cestě x→y" – cestový update
  rozděl strom / spoj 2 stromy hranou – změny struktury

Statické cesty



+ váhy ve vrcholech

Vytvoříme intervalový strom nad posloupností vah: (inorderem, listové vrcholy odpovídají hranám původního stromu)



- úplný bin. strom hloubky $O(\log n)$ uložený "jako halda"
- podcesta $i \to j$ → interval listů → lze pokrýt $O(\log n)$ podstromy, kořen ∀ podstromu si pamatuje min } cestový dotaz v $O(\log n)$

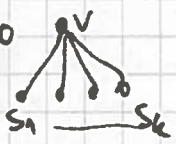
2024: uvažujeme váhy ve vrcholech i hranách

- bodový update → přepočítám cestu do kořene → $O(\log n)$
- cestový update → rozložíme na $O(\log n)$ podstromů
  update podstromu líným vyhodnocováním:
  Do kořene umístíme poznámku "vše níže zvýš o δ", kdykoli na ni při průchodu shora narazíme, prostě ji přesuneme do obou synů → ostatní operace poznámky nepotkají, vždy jsme tu část stromu, do níž přijdou, vyčistíme. } $O(\log n)$

mezi kořenem a těmito podstromy leží $O(\log n)$ vrcholů, jejich minima musíme přepočítat

Heavy-light dekompozice (HLD)

- mějme zakořeněný strom, $s(v) :=$ velikost podstromu zakořeněného v v

Def: Pro  hrana vs_i je **těžká** $\equiv s(s_i) \geq s(v)/2$, jinak je **lehká**

(jiná možnost: těžká hrana vede do největšího podstromu)

Vše vyjde lépe, pokud hrany orientujeme směrem ke kořeni

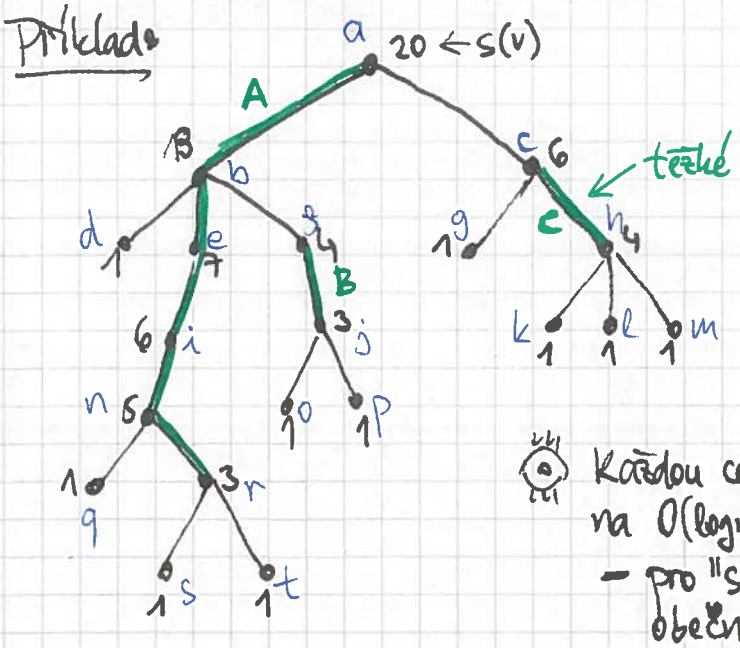
① z ∀v vede dolů nejvýše 1 těžká hrana → ∀v leží na právě 1 **těžké cestě** (možná 1 vrcholové)

② na ∀ cestě kořen → list leží max. $\log n$ lehkých hran.

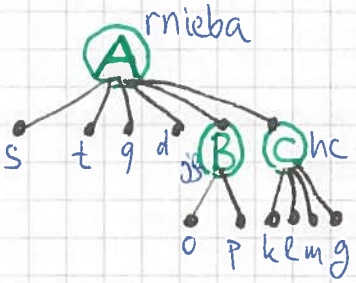
⇒ strom rozložíme na $O(n)$ těžkých cest, jsou propojené lehkými hranami

∞ HLD najdeme v čase $O(n)$ pomocí DFS.

Příklad:



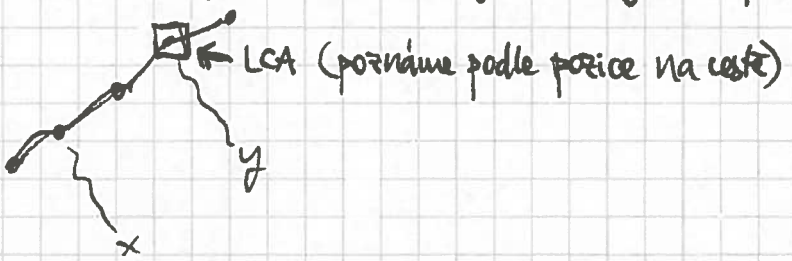
Komprese těžkých cest →



Každou cestu ve stromu umíme rozložit na $O(\log n)$ lehkých hran a $O(\log n)$ částí těžkých cest
- pro "svislou" cestu snadné,
obecnou cestu rozdělíme na 2 svislé v LCA(x,y)

Aplikace:

- LCA(x,y) - nejbližší společný předchůdce
  - pro $\forall v$ předpočítáme: id těžké cesty, pozici na ní } $O(n)$
  - pro $\forall$ těžkou cestu: kam z jejího nejvyššího bodu vede lehká hrana (ehm, opět...)
  - pak skáčeme z x,y po těžkých cestách, dokud nenajdeme nějakou společnou: } $O(\log n)$



- cestové dotazy
  - pro $\forall$ těžkou cestu pořídíme reprezentaci intervalovým stromem
    → cestový dotaz: $O(\log n)$ lehkých hran
    + $O(\log n)$ intervalových dotazů po $O(\log n)$ } $O(\log^2 n)$

    ... a umíme bodový i cestový update
- zrychlení pro statické váhy

  ∃ $O(\log n)$ intervalů jsou až na 1 výjimku vše prefixy/suffixy
  → 1 interval po $O(\log n)$, ostatní v $O(1)$ po předvýpočtu px/sx minim
  → celý cestový dotaz v $O(\log n)$

Dynamická dekompozice – Link-Cut stromy [Sleator & Tarjan 1982]

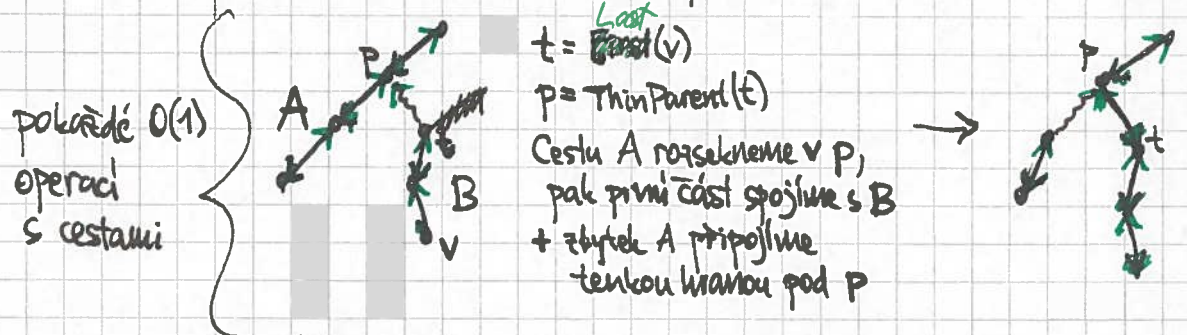
(pozdější verze se Splay-stromy... 1985)

- Místo těžkých/lehkých hran tlusté/tenké
  - není dáno vlastnostmi stromu, ale historií struktury
  - ∀ vrchol má stále max. 1 tlustou hranu do syna
    → tlusté cesty spojené tenkými hranami, na DS pro cesty dořešíme později
  - tentokrát o hloubce nic neříkáme, ale amortizovaně vše dopadne večekaně dobře

- Reprezentujeme les zakořeněných stromů s ohodnocenými vrcholy
  hrany zorientujeme do kořene

- Operace:
  - strukturální dotazy: Parent(v), Root(v)
  - strukturální změny: Cut(v) – smaže hranu mezi v a Parent(v)
    Link(u,v) – natáhne hranu z u do v (u musí být kořen)
    Evert(v) – překoření strom za v
  - dotazy na váhy: Cost(v)
    PathMin(u,v) – min. na cestě mezi v a Root(v)
  - změny vah: SetCost(v,x)
    PathUpdate(v,δ) – přičte δ ke všem vahám na cestě Root(v)→v

- Interně:
  - problém vyřešíme nejprve pro cesty (viz níže), pak pro stromy pomocí rozkladu na tlusté/tenké
  - operace pro cesty: Prev, Next, First, Last
    - Cut, Link, Reverse
    - Cost, PathMin
    - SetCost, PathUpdate
    } Path* z v do Last(v)
  - cesta si pamatuje, jaká z jejího konce vede tenká hrana
  - Expose(v): předělá reprezentaci tak, že cesta Root(v) → v je tlustá & pod v není žádná tlustá hrana
    - kroky: tenká → tlustá (můžeme provést mnohokrát)



tlustá → tenká podobně (to děláme jen 1× pod v)

- Všechny operace převádíme na Expose + op. na tlusté cestě
  (rozmyslet Evert, ten jako jediný potřebuje Reverse cesty)

Věta: [SeT 1982] Expose provede amort. $O(\log n)$ kroků

⇒ při repr. cest vyváženými stromy se dostaneme na $O(\log n)$ na cestovou op.
→ celkem $O(\log^2 n)$

Lze vylepšit na $O(\log n)$, dokonce w.c. [SeT 1982], ale je to dost pracné.
My ukážeme $O(\log n)$ amort. pomocí Splay stromů. [SeT 1985]

Opakování Splay stromů

- Splay(v) "vyrotuje" v do kořene (rotace + dvojrotace)
- Amortizace: - vrcholům přiřadíme libovolné váhy $w(v) > 0$ [struktura o nich neví!]
  - velikost podstromu $s(v) := \sum_{u \in T_v} w(u)$
  - rank vrcholu $r(v) := \log s(v)$
  - potenciál struktury $\Phi := \sum_v r(v)$

Lemma: (přístupové) Splay(v) ve stromu s kořenem k stojí $O(r(k) - r(v))$ rotací

⇒ pro $w = 1$ dostaneme $r = O(\log n)$ ⇒ Splay stojí $O(\log n)$
– nám se časem bude hodit nastavovat váhy jinak, dostaneme jiné odhady ...

Reprezentace cest

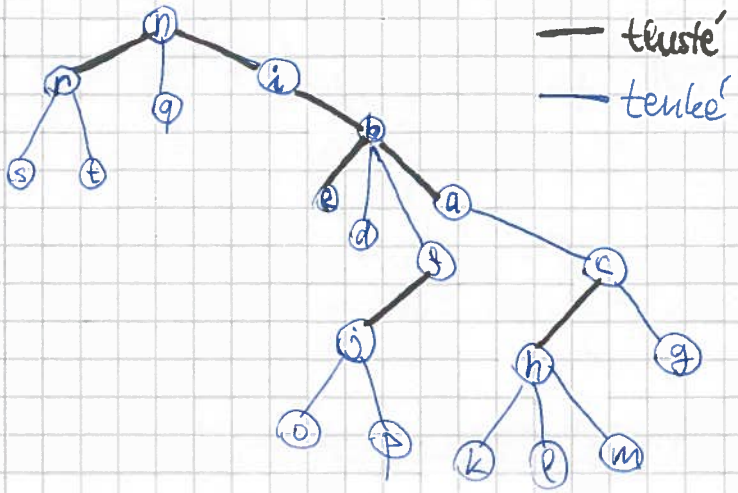
- Každou ~~tlust~~ tlustou cestu popíšeme Splay stromem
- Vrcholy nemají klíče, ale jejich symetrické pořadí odpovídá pořadí na cestě
- Kdykoli sáhneme na vrchol, vysplayujeme ho do kořene
- Ve vrcholech minima podstromů, při rotacích snadno přepočteme
- PathMin(v): Splay(v), pak se podíváme do ~~levého~~ pravého syna na předpočtené min.
- PathUpdate vyhodnocujeme líně, při rotacích čistíme ~~dolů~~
- Reverse: instrukce "v podstromu prohoď směry", opět vyhodnocujeme líně

! pozor na to, abychom chodili shora dolů, jinak nezvolíme abs. směr (vadí to? ?!)
↳ u splaye ne, ale u Next třeba ano

Reprezentace stromů

- potřebujeme propojit Splay stromy cest → vrcholy kromě L a P syna dostanou ještě tenké syny – odpovídají tenkým hranám, může jich být libovolně mnoho
  - ale pozor, pozvánku je jen zdola (pamatuje si kořen podřízeného stromu)
  - ↳ přesvědčujeme při rotacích
- tím vznikne jeden společný strom se dvěma typy hran

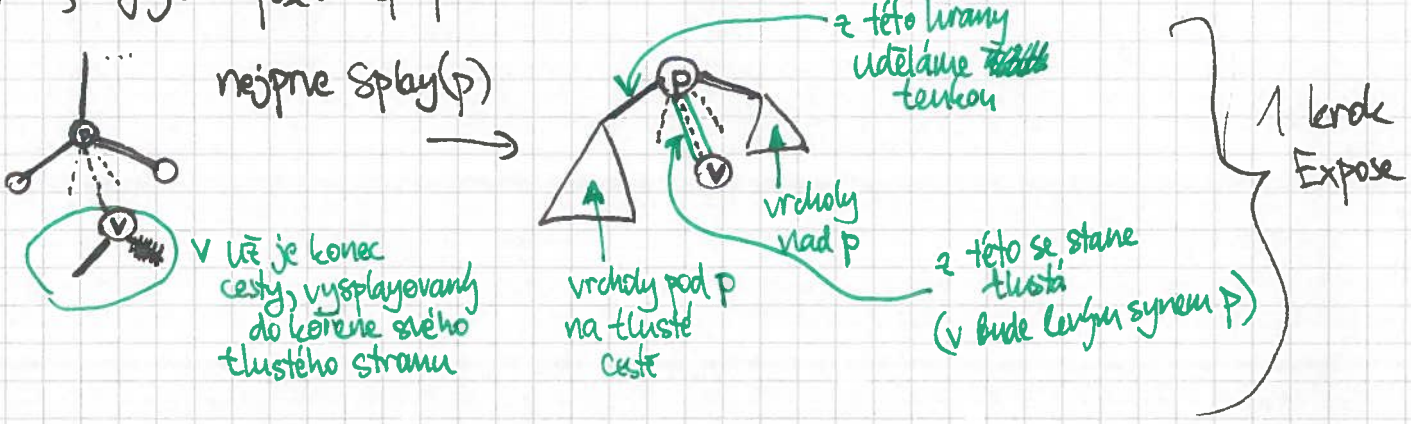
Pro naši ukázkovou dekompozici



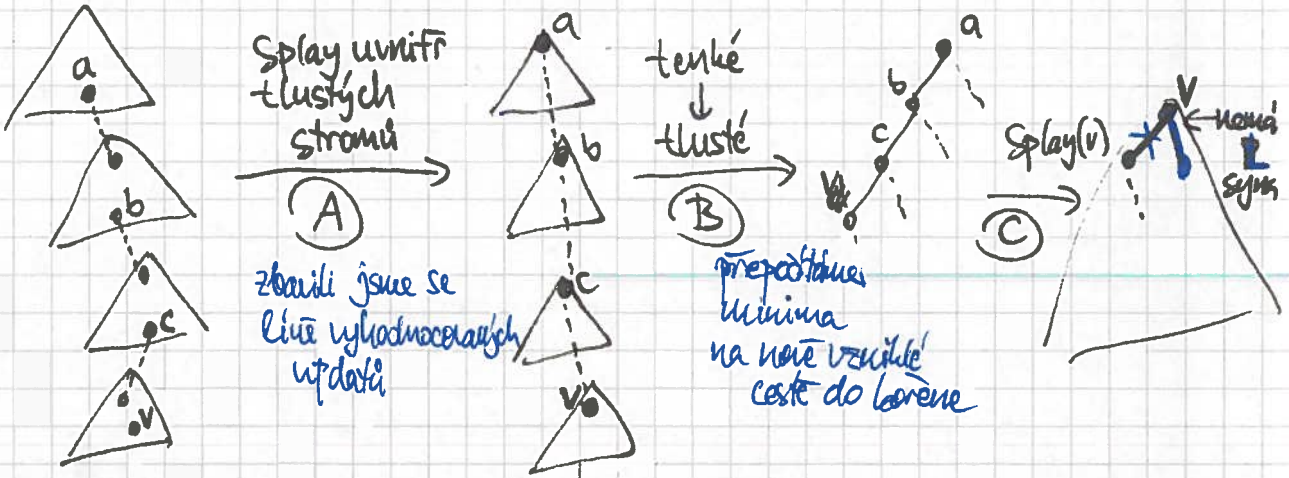
— tlusté
— tenké

! Líné updaty se nepropagují po tenkých hranách (ani by to nešlo ?!)

- jak funguje Expose (případ tenká → tlustá)



Celkově:



Amortizace: Budeme chtít, aby platilo $\$w(v) = \#$ potomků v včetně podvržených stromů pod tenkými hranami

Stále $s(v) \leq n \Rightarrow r(v) \leq \log n$

① V každém tlustém stromu můžeme nastavit váhy tak, aby $s(v)$ vyšly tak, jak potřebujeme; Φ počítáme dohromady přes celý společný strom

② výměny tenká ↔ tlustá neovlivňují Φ

A) zaplatíme z potenciálu (↳ pozor na +1 za každý Splay, ale to se nejvýše dvakrát)

C) jakkoukoli

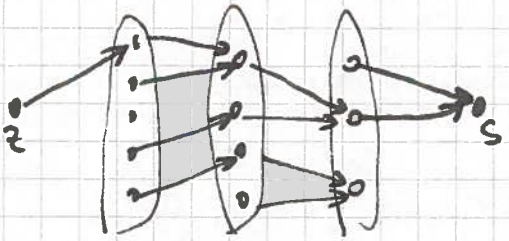
B) shora omezíme časem na C)

vše trvá $O(r(\text{původní kořen}) - r(v) + 1)$
[sumy se teleskopují ...]
... ale tv $r(v) \leq \log n$
$\Rightarrow$ Expose trvá $O(\log n)$
$\Rightarrow$ všechny odvozené operace také.

Aplikace Link-Cut stromů

- Dinicův alg. na hledání max. toku: $n \times$ blokující tok ve vrstevnaté síti
  - chytře hladově $O(nm)$ ... opakovaně posílám po cestách (pokaždé $O(n)$ díky vrstvám)
    ... vždy vypadne aspoň 1 hrana $\Rightarrow$ max. m-krát
    + čištění, celkem v $O(m)$

- Zrychlení pomocí Link-Cut:



každý vrchol si vybere 1 odchozí hranu
⇓
vzniknou stromy orientované doprava
↓
L-C strom s váhami na hranách, to jsou rezervy v síti

Opakujeme: 1) Pokud Root(z) = s:
- $v \leftarrow$ PathMin(z)
- ~~PathUpdate~~
- Pokud Cost(v) = 0: Cut(v) } čistíme hrany s nulovou rezervou
  Jinak: PathUpdate(z, -Cost(v)) } posíláme po stromu

2) $r \leftarrow$ Root(z)
Pokud ∃ neoznačená hrana $r \to t$ pro nějaké t: } (označím ji)
  Link(r, t) } rozšiřujeme strom doprava
Jinak ~~skončíme~~ smažeme všechny hrany do r, } už nešel rozšířit: smažeme jeho kořen (opět čištění)
  na vybraných uděláme Cut
  ~~Pokračuj~~
  ↳ & pokud r = z, skončíme. } už není co smazat → máme prázdnou síť

↳ provedeme $O(m \cdot$ ~~max~~$)$ operací, každá stojí $O(\log n)$
↳ blok. tok najdeme v $O(m \log n)$ – Jak zjistíme, kolik nakonec kudy teče? Stačí porovnat rezervy s kapacitami...
↳ max. tok najdeme v $O(nm \log n)$.
  [umí se $O(nm)$ – Orlin 2012]

A u hran ve stromech řekne strom, u už smazaných ~~[illegible]~~ si r uložíme při mazání hrany. Jinde neteče nic.