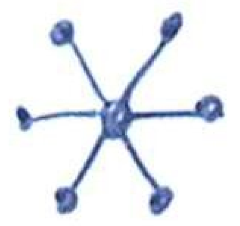
Rovinné grafy bez $\triangle$ pro $v \geq 3$

Maximální grafy: stěny jsou C_4, C_5, případně celý graf je  (hvězda s aspoň 2 cípy) ← platí také

z Eulerovy formule: $\left.\begin{array}{l} 4f \leq 2e \\ f \leq \frac{4}{2}e \end{array}\right\}$ $\begin{array}{l} v + \frac{1}{2}e \geq e+2 \\ v-2 \geq \frac{1}{2}e \end{array}$ $\to$ $\boxed{e \leq 2v-4}$

Proto: ① průměrný stupeň < 4
② existuje vrchol stupně max. 3
③ $K_{3,3}$ není rovinný: $v=6$, $e=9$, ale $2v-4=8$.

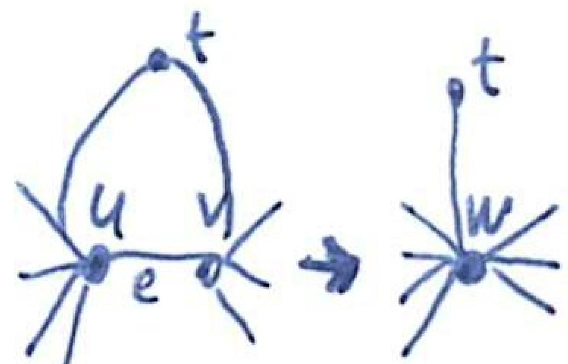
Operace zachovávající rovinnost

Dělení hrany: $G \% e$ $\quad u \overset{e}{—} v \to u \overset{e_1}{—} w \overset{e_2}{—} v$

dělení K_5 ani $K_{3,3}$ nemůže být rovinné

$V(G\%e) := V(G) \cup \{w\}$

$E(G\%e) := E(G) \setminus \{\{u,v\}\} \cup \{\{u,w\},\{w,v\}\}$

Kontrakce hrany $G.e$ 

$V(G.e) := V(G) \setminus \{u,v\} \cup \{w\}$

$E(G.e) := \left(E(G) \cap \binom{V(G.e)}{2}\right) \cup \left\{\{x,w\} \mid \{x,u\} \in E(G) \vee \{x,v\} \in E(G)\right\}$

nebo: $\cup \{e \setminus \{u,v\} \cup \{w\} \mid e \in E(G), |e \cap \{u,v\}| = 1\}$

Věta (Kuratowského): G není rovinný $\Leftrightarrow$ G má podgraf izomorfní dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.
↑ lze ho získat opakovaným dělením hran z ...

(zatím bez důkazu)

Poznámka: Dokonce platí G je rovinný $\Leftrightarrow$ G má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow$ G má nakreslení úsečkami.

Problém 4 barev (1852): Politickou mapu jde obarvit 4 barvami tak, aby žádné 2 sousední státy neměly stejnou barvu.
↑ nenulová délka společné hranice (tj. ne bod)

↳ barvíme stěny topologického rovinného grafu tak, aby stěny sousedící hranou neměly stejnou barvu → převedeme na barvení vrcholů (spojeny hranou ⇒ různé barvy)

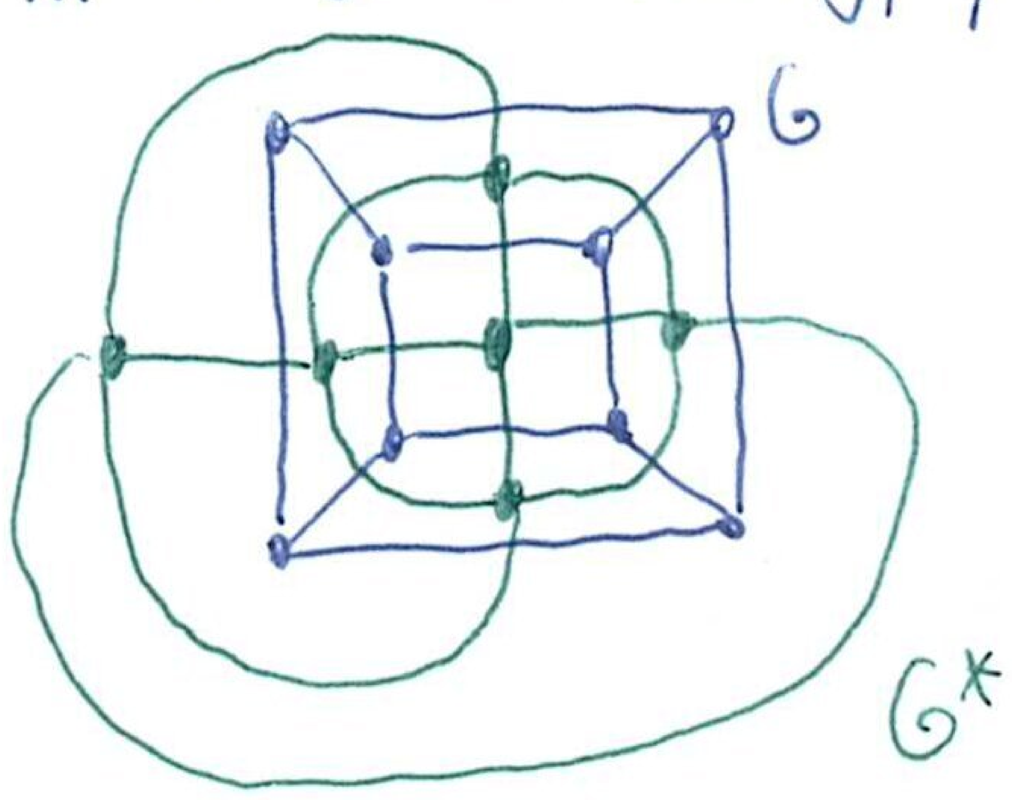
Df: Duální graf G^* k topolog. rov. grafu G:

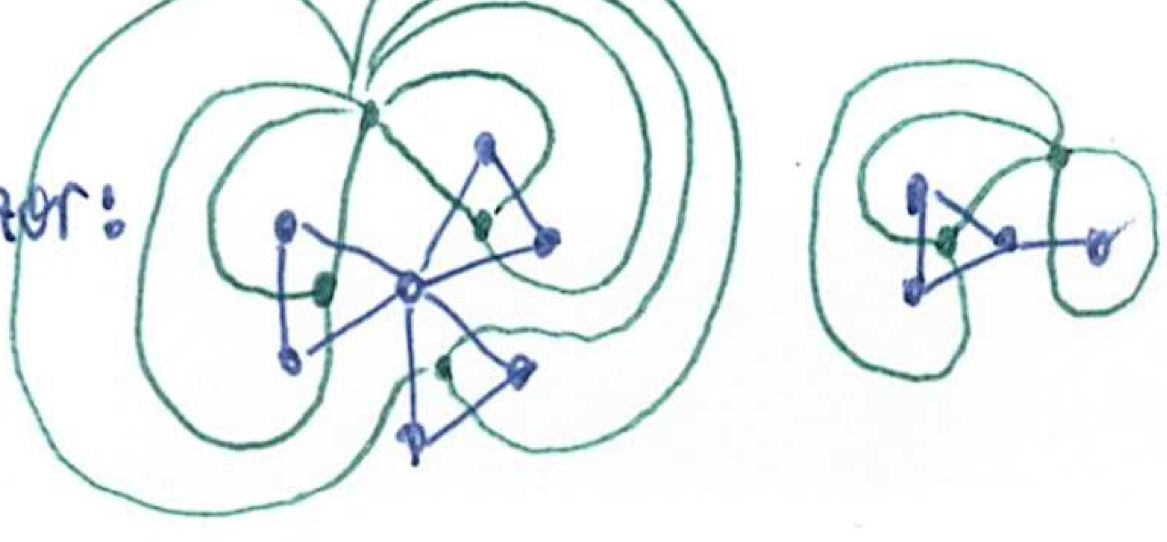
$V(G^*) :=$ stěny G

$\{f,g\} \in E(G^*) \equiv$ stěny f,g sousedí v G hranou

→ přesněji: za každou hranu v G přidám hranu do G^* spojující stěny G oddělené hranou

G^* je také rovinný, prohodí se stěny $\leftrightarrow$ vrcholy, hrany se zachovají] Eulerova formule je symetrická vůči $v \leftrightarrow f$



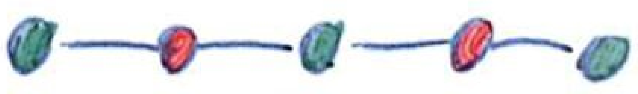
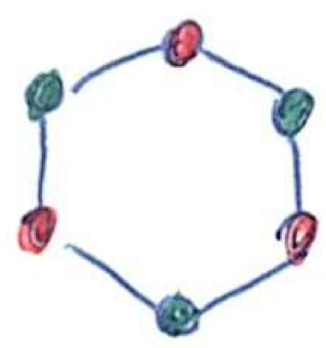
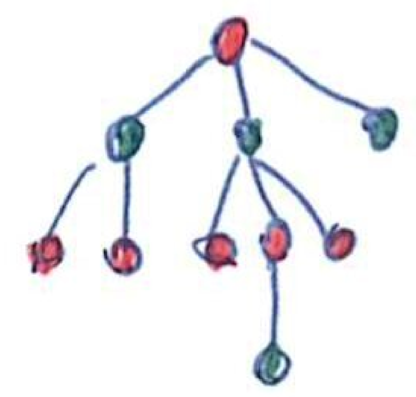
ale pozor: 

Duál je obecně multigraf se smyčkami a násobnými hranami

Df: Obarvení grafu $G=(V,E)$ k barvami je funkce $c: V \to [k]$ t.ž. $\{x,y\} \in E \Rightarrow c(x) \neq c(y)$.

Df: Graf je k-obarvitelný $\equiv$ $\exists c$ obarvení k barvami.] každý graf je $|V|$-obarvitelný

Df: Barevnost (chromatické číslo) $\chi(G) := \min\{k \mid G \text{ je } k\text{-obarvitelný}\}$] triv. $\chi \le |V|$

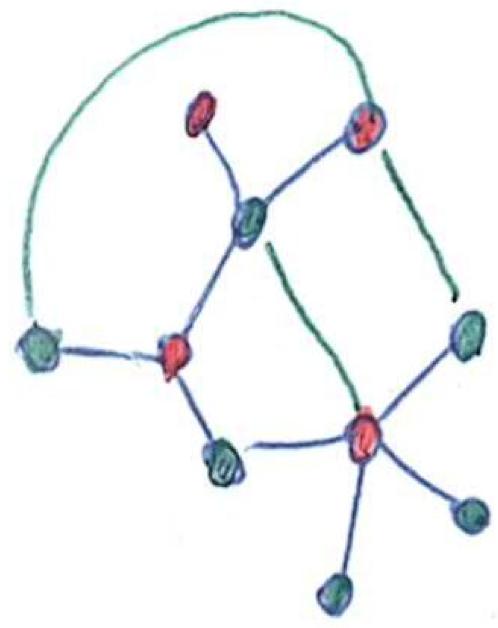
Příklady:
- E_n (graf s n izolovanými vrcholy) má $\chi = 1$, ostatní grafy mají $\chi \ge 2$
- K_n (úplný graf na n vrcholech) má $\chi = n$.
- P_n (cesta s n hranami): $\chi \le 2$ 
- C_n (kružnice) pro sudé n $\chi = 2$  pro liché n $\chi = 3$ 
- pokud graf obsahuje lichý cyklus, má $\chi \ge 3$
  - obecně: pokud $H \subseteq G$, pak $\chi(H) \le \chi(G)$
  - proto $\chi(G) \ge \omega(G)$, kde $\omega(G)$ je klikovost grafu: max. k t.ž. G má podgraf izomorfní s K_k.
- stromy mají $\chi \le 2$:  zvolíme kořen, barvíme podle vzdálenosti od kořene mod 2 ("po patrech")

Lemma: Graf G je bipartitní $\Leftrightarrow$ $\chi(G) \le 2$. (partity odpovídají barvám)

Věta: G je bipartitní $\Leftrightarrow$ G neobsahuje lichou kružnici.

Dk: $\Rightarrow$ už víme

$\Leftarrow$ Stačí dokázat pro souvislý G, jinak barvíme po komponentách.
Zvolíme $T :=$ kostra grafu G, $c :=$ 2-obarvení T.
Ukážeme, že c je 2-obarvení celého grafu.
Nechť $e = \{x,y\}$ je hrana v $E(G) \setminus E(T)$.
Vrcholy x,y jsou v T spojeny nějakou cestou P, na níž se střídají barvy. Kdyby bylo $c(x) = c(y)$, pak má P sudý # hran $\Rightarrow$ $P+e$ by byla lichá kružnice.



Myšlenka: Barvení indukcí – zkusme pro stromy, indukce podle $n := |V|$.

1. $n = 1 \to$ triviálně 2-obarvitelné.
2. $n \to n+1$: Nechť T je strom s $n+1$ vrcholy, ℓ jeho list, $T' := T - \ell$.
   Podle IP $\exists c'$ 2-obarvení T'.
   Rozšíříme na obarvení c celého T: $c(v) := c'(v)$ pro všechny $v \neq \ell$.
   $c(\ell)$ je barva opačná k barvě souseda ℓ.

Věta (o 6 barvách): Rovinné grafy jsou 6-obarvitelné.

Dk: Opět indukcí podle $|V|$, odtrháváme vrchol stupně ≤ 5 $\Rightarrow$ jeho sousedé zaberou max. 5 barev, takže aspoň 1 zbývá.

Věta: $\chi(G) \le \Delta(G)+1$, kde $\Delta(G) := \max\limits_{v \in V(G)} \deg_G(v)$.

Dk: Opět indukcí, odtrháváme libovolný vrchol.

Obecnější pohled: Sestrojíme lineární uspořádání na $V(G)$ t.ž. z každého vrcholu vede max. k hran do menších vrcholů. Barvíme podle tohoto uspořádání a postačí nám $k+1$ barev.

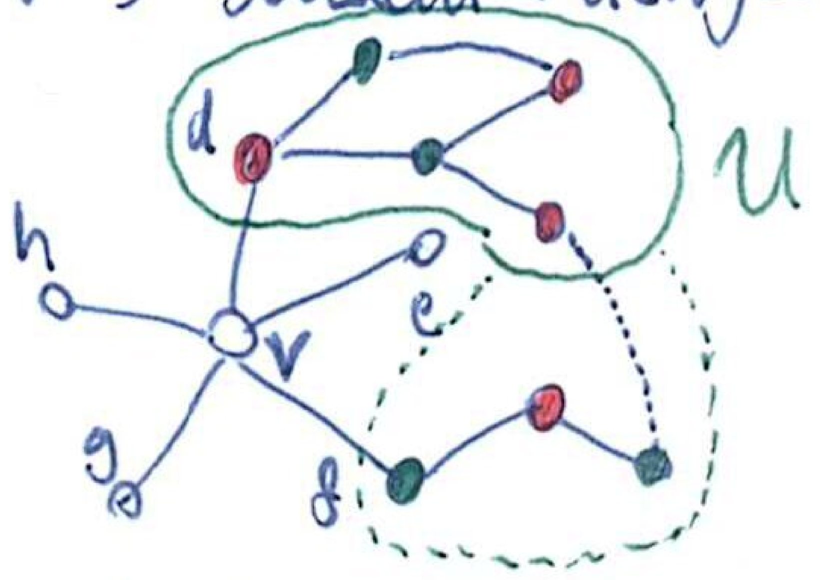
Věta (o 4 barvách): Pro rovinný G je $\chi(G) \le 4$.

Dk. těžký, až 1976, rozbor případů na počítači + chytrá teorie.

Věta (o 5 barvách): … $\chi(G) \le 5$.

Dk #1: Opět indukce podle $n := |V|$.

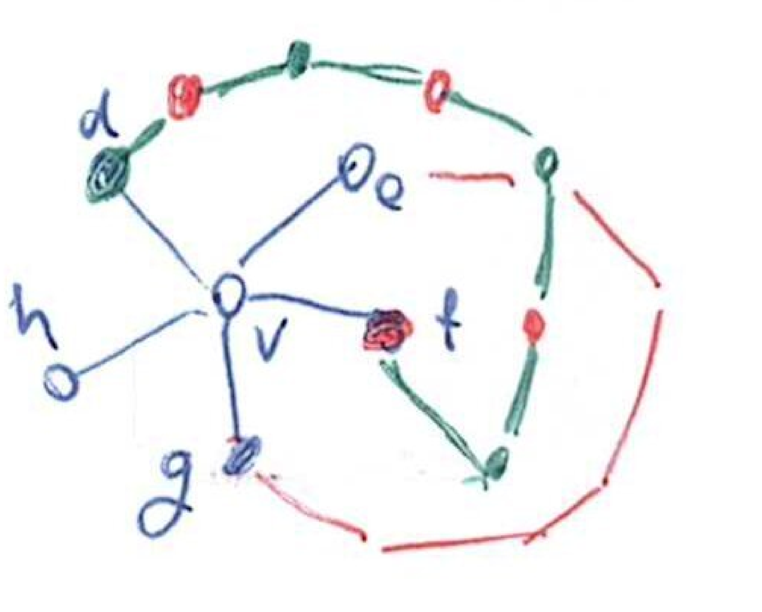
1. pro $n \le 5$ dáme každému vrcholu jinou barvu.
2. $n \to n+1$: mějme G rovinný s $n+1$ vrcholy, v stupně ≤ 5, $G' := G - v$.
   Podle IP existuje 5-obarvení c' grafu G'.
   - pokud sousedé v mají v c' méně než 5 různých barev, zbývá volná barva pro v.
   - jinak má v 5 sousedů různých barev, zvolme nějaké nakreslení:



Nechť U je podgraf G' dosažitelný z d přes vrcholy barev $c'(d)$ a $c'(f)$.

tzv. Kempeho řetězce

- pokud $f \notin U$, stačí v U prohodit barvy
  $\to$ dostaneme jiné korektní obarvení, v němž se $c'(d)$ uvolní pro v.
- jinak uděláme totéž mezi e, g a už to musí vyjít:



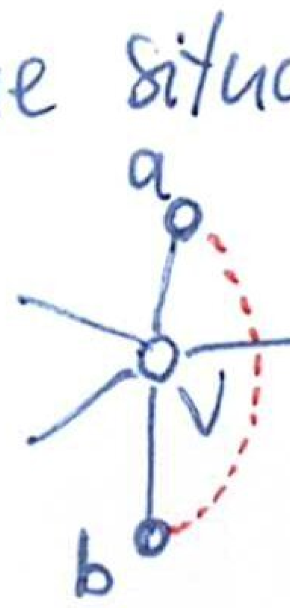
Cesty by se musely překřížit, to ale jde pouze ve vrcholu, ovšem ten by musel mít 2 barvy současně ↯

Dk #2: Stejná indukce, jen jinak řešíme situaci se sousedy 5 různých barev.

Nechť v je vrchol stupně 5 v G.

$\exists\, a, b$ sousedé v t.ž. $\{a,b\} \notin E$.

↳ jinak by v grafu byla K_5



$G' := G - v + \{a,b\}$ rovinný

$\downarrow$

$G'' := G' . \{a,b\}$ rovinný

$|V(G'')| < |V(G)|$

$\xrightarrow{IP}$ obarvení c'' grafu G''

$\uparrow$ obarvení c' grafu G kde a, b mají stejné barvy

Tím jsme uvolnili barvu pro v.

PLATÓNSKÁ TĚLESA

Df: Trojrozměrné konvexní mnohostěny, stěny jsou shodné pravidelné mnohoúhelníky, ve všech vrcholech se potkává stejný #hran.

→ Opíšeme mnohostěnu kouli, ze středu promítáme na její povrch → graf nakreslený na sféře

↓

stereografickou projekcí: rovinný graf v $\mathbb{R}^2$: vrcholy, hrany, stěny grafu odpovídají v/h/s mnohostěnu.

Co graf splňuje:

- v vrcholů, e hran, s stěn
- je k-regulární pro $3 \le k \le 5$
  - ↑ existence vrcholu nízkého stupně
- stěny mají stejný stupeň s
  - ☺ dualita prohodí $v \Leftrightarrow f$, $k \Leftrightarrow s$, proto $3 \le s \le 5$

Proto: $e = \underset{\uparrow}{\frac{kv}{2}} = \underset{\uparrow}{\frac{sf}{2}}$, tedy $v = \frac{2e}{k}$, $f = \frac{2e}{s}$ → dosazením do Eulerovy formule:

princip sudosti; totéž pro duál

$$\frac{2e}{k} + \frac{2e}{s} = e + 2 \quad \Big| :2e$$

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2} + \frac{1}{e}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \quad \Big\}\ \text{musí být} > 0$$

Rozbor případů:

① $k=5$: $\frac{1}{5} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{e} > 0$

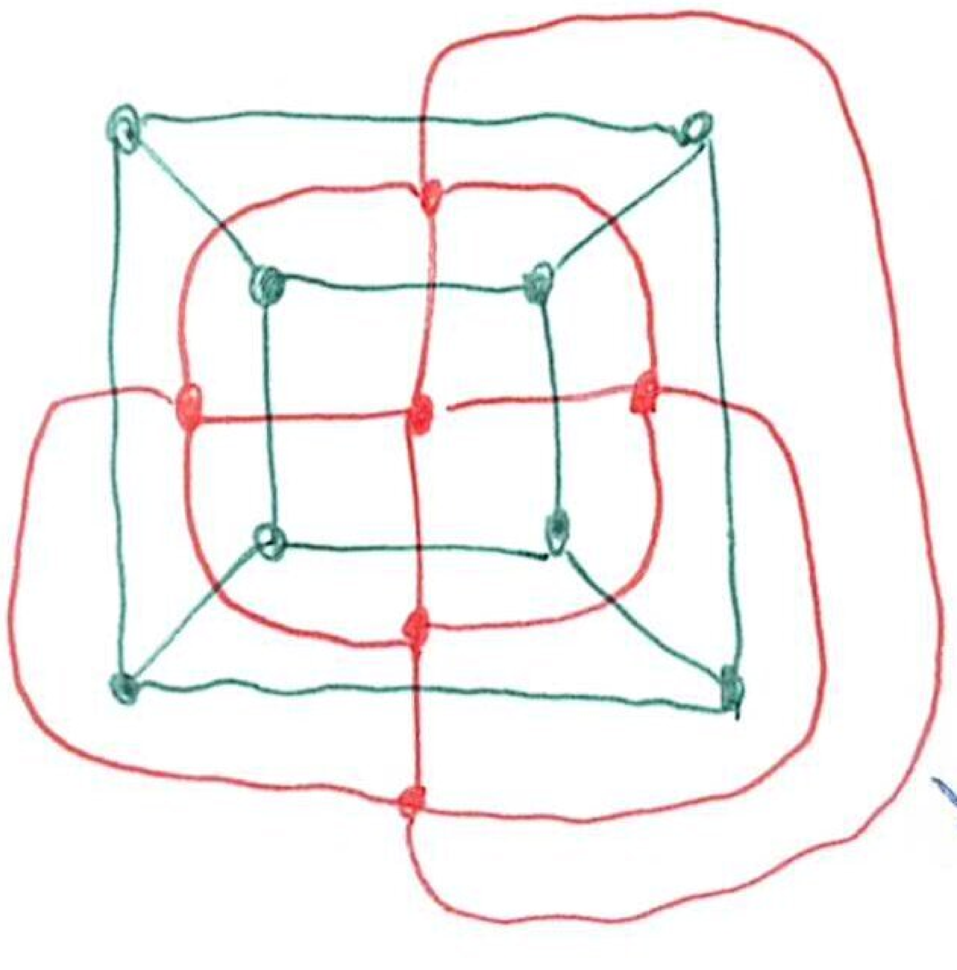
$\frac{1}{s} - \frac{5-2}{10}$ ... pro $s=3$ máme $\frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30}$] $e=30$ $v = \frac{2e}{k} = \frac{60}{5} = 12$, $f = \frac{2e}{s} = \frac{60}{3} = 20$] 20-stěn (ikosaedr)

② $k=4$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{4}$ ... opět lze jen $s=3$: $\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{4-3}{12} = \frac{1}{12}$] $e=12$ $v = \frac{24}{4} = 6$, $f = \frac{24}{3} = 8$] 8-stěn (oktaedr)

③ $k=3$: $\frac{1}{3} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{6}$

- $s=3$: $\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$] $e=6$ $v = \frac{12}{3} = 4$ $f = \frac{12}{3} = 4$] 4-stěn (tetraedr) — duální sám k sobě
- $s=4$: $\frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{1}{12}$] $e=12$ $v = \frac{24}{3} = 8$ $f = \frac{24}{4} = 6$] 6-stěn (krychle)
- $s=5$: $\frac{1}{5} - \frac{1}{6} = \frac{1}{30}$] $e=30$ $v = \frac{60}{3} = 20$ $f = \frac{60}{5} = 12$] 12-stěn (dodekaedr)

dualita



hezčí obr.: