③ každá X_i je antiřetězec $\Rightarrow \forall i\ |X_i| \leq \alpha(P)$

④ existuje řetězec délky $t \Rightarrow t \leq \omega(P)$

└ proč: zvolme $a_t \in X_t$ libovolně

$a_t \notin X_{t-1}$, proto musí existovat $a_{t-1} \in X_{t-1}$ t.ž. $a_{t-1} < a_t$.

$a_{t-1} \notin X_{t-2} \Rightarrow \exists\, a_{t-2} \in X_{t-2}$ t.ž. $a_{t-2} < a_{t-1}$

atd. až do $a_1 \in X_1$.

$\{a_1 - a_t\}$ tvoří řetězec.

z ②-④ plyne: $|X| = \sum_i |X_i| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$, což je tvrzení věty.

Aplikace: Věta (Erdős-Szekeres): Posloupnost čísel délky n^2+1 obsahuje monotónní podposloupnost délky $n+1$.

Už jsme zmínili na začátku semestru

neostře, tedy nerostoucí nebo neklesající

Dk: Mějme $x_1 - x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$.

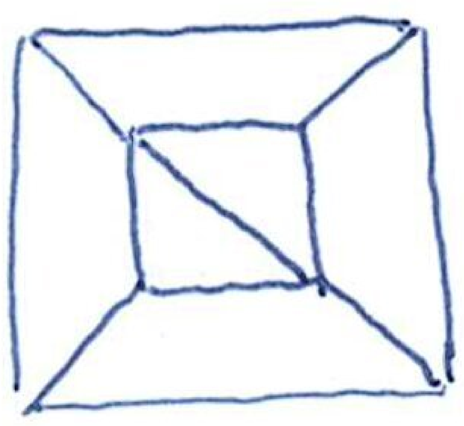
Na $[n^2+1]$ zvolme relaci $\preceq$: $i \preceq j \equiv i \leq j \;\&\; x_i \leq x_j$

① $\preceq$ je uspořádání.

② řetězec odpovídá neklesající pp., antiřetězec nerostoucí pp.

Stačí aplikovat D&Š.

KRESLENÍ GRAFŮ DO ROVINY



- vrcholy → body v rovině
- hrany → oblouky – spojité křivky, které samy sebe neprotínají
  ↳ formálně: spojitá, prostá funkce $[0,1] \to \mathbb{R}^2$
- "hrany se nekříží"
  - pokud vrchol leží na hraně, je její koncový vrchol ← nesmí se
  - pokud mají 2 hrany společný bod, je to jejich společný koncový vrchol

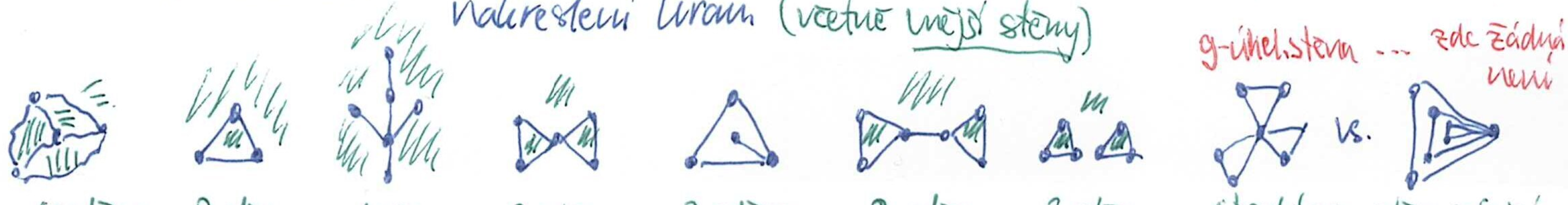
definujeme neformálně, nemajíce zatím vybudovanou analýzu a topologii

↳ rovinné nakreslení grafu → Df: Graf je rovinný ≡ má aspoň 1 rovinné nakreslení.

Df: Topologický rovinný graf ≡ graf spolu s rovinným nakreslením

👁 Nakreslení cesty je oblouk, nakreslení cyklu uzavřená křivka ← topologická kružnice (jako oblouk, ale $f(0)=f(1)$)

Df: Stěny nakreslení ≡ oblasti, na něž dělí rovinu sjednocení nakreslení hran (včetně vnější stěny)



4 stěny | 2 stěny | 1 stěna | 3 stěny | 2 stěny | 2 stěny | 3 stěny | struktura stěn závisí na nakreslení

Nakreslení stromu má vždy 1 stěnu.
Nakreslení lesa také.
Nakres. ostatních grafů má aspoň 2 stěny — (Topolog.) Kružnice dělí rovinu na 2 části: vnitřek a vnějšek. — Jordanova věta o kružnici

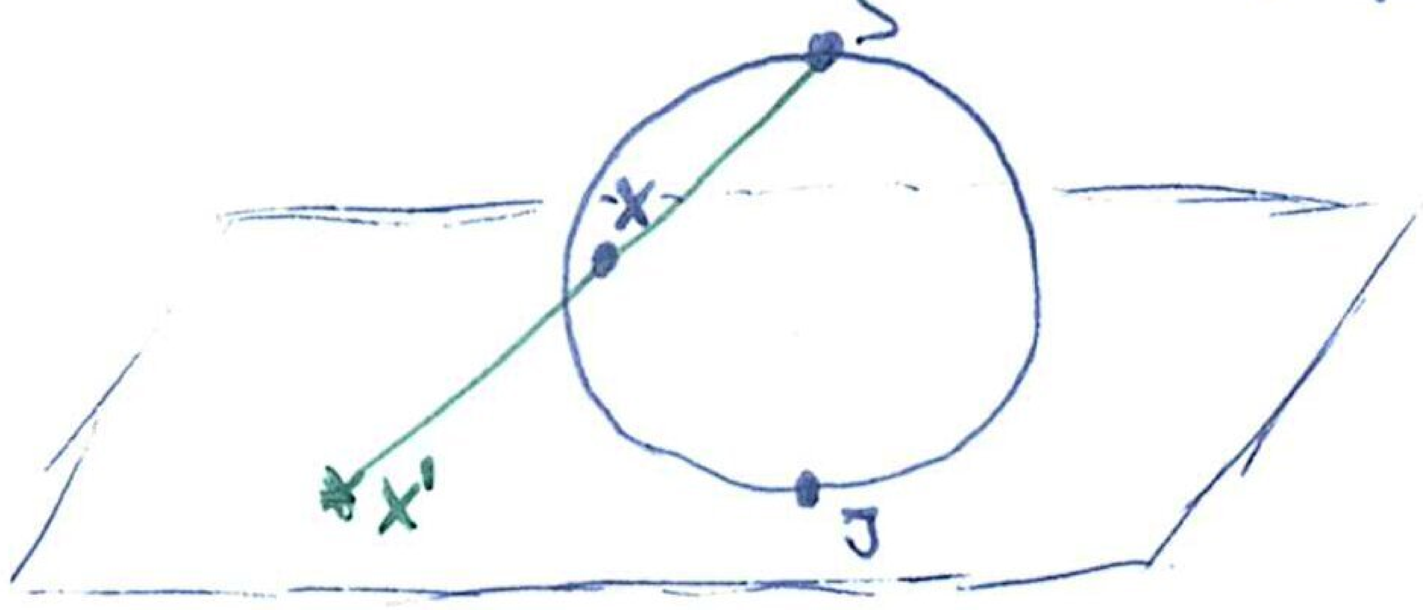
Tvrzení: V souvislém topolog. grafu je hranice každé stěny nakreslením nějakého uzavřeného sledu.

K_5 není rovinný. Cyklus 1,2,3 je nakreslen jako topolog. kružnice.

BÚNO 4 je uvnitř.
Ať už nakreslíme 5 do libovolné stěny, 1 hrana nepůjde nakreslit.

Kreslení na sféru — Věta: G lze nakreslit na sféru $\Leftrightarrow$ G je rovinný.

Dk: Stereografická projekce – spojitá bijekce mezi rovinou a sférou bez 1 bodu } oblouk zobrazí na oblouk, nakreslení na nakreslení, stěnu na stěnu, vnější stěnu na stěnu obsahující S



Důsledek: Můžeme si v rov. nakres. zvolit, která stěna je vnější.
↳ promítneme z roviny na sféru, pak sféru otočíme a promítneme zpět.

Kreslení na další plochy: válcová plocha – stejně jako rovina
torus ("pneumatika") – jde nakreslit K_5
(a neplatí analogie Jordanovy věty!)
Möbiova páska – dokonce jde K_6

Věta (Eulerova formule): Je-li G souvislý graf nakreslený do roviny a $v = |V(G)|$, $e = |E(G)|$, $f = \#$hran nakreslení, pak $v + f = e + 2$.

Dk: Indukcí podle e: (Zafixujeme v, pak)

1. Min. souvislý graf je strom, má $e = v - 1$ a $f = 1$: $v + 1 = v - 1 + 2$ ✓
2. Indukční krok $n \to n+1$: G na $n+1$ vrcholech není strom $\Rightarrow \exists h$ hrana na cyklu.
$G' := G - h$ má $v' = v$, $e' = e - 1$, $f' = f - 1$ $\overset{IP}{\Rightarrow}$ $v' + f' = e' + 2$
$v + f - 1 = e - 1 + 2$
$\Rightarrow v + f = e + 2$.

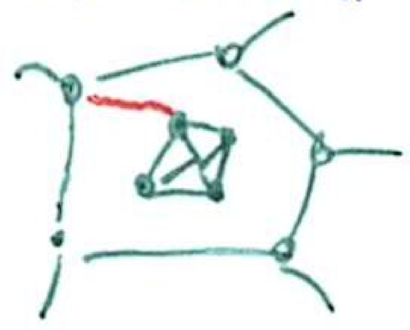
Důsledek: Všechna nakreslení téhož grafu mají stejný #stěn.

Df: G je <u>maximální rovinný</u> $\equiv$ G je rovinný & $\forall e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$: $G+e$ není rovinný.

Věta: V nakreslení max. rovinného grafu s aspoň 3 vrcholy jsou hranice všech stěn trojúhelníky. ← takovým grafům se říká <u>rovinné triangulace</u>

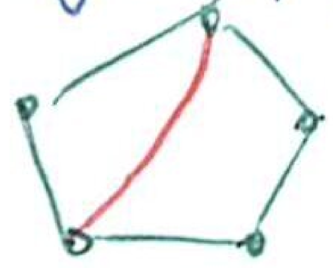
Dk: Nechť G je max. rovinný s nakreslením.

① G je souvislý: jinak lze



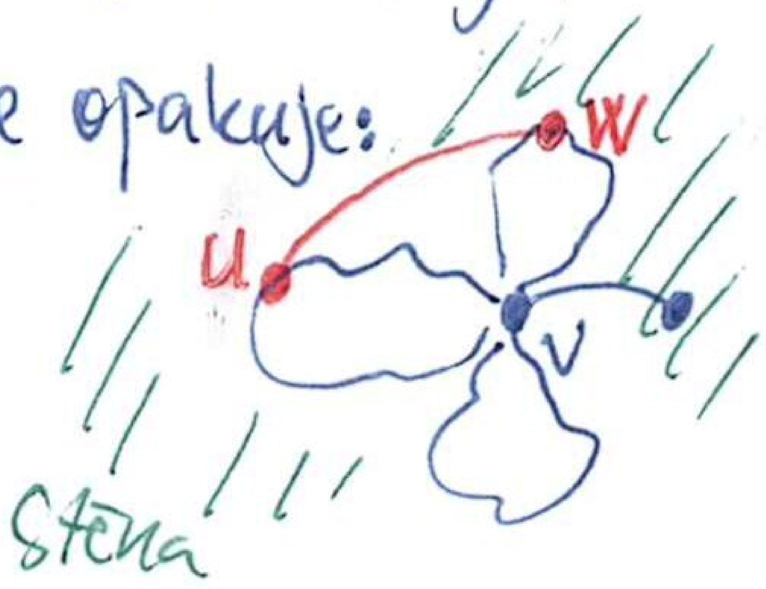
nakreslení 1 komponenty vložím dovnitř stěny jiné komponenty a pak mohu přidat hranu $\Rightarrow$ G nebyl max. ↯

② Pokud je stěna ohraničena cyklem, je to $\triangle$:
Kdyby to byl C_n pro $n \geq 4$:



mohu přidat úhlopříčku ↯

③ Pokud je stěna ohraničena uzavřeným sledem, co není kružnice:
Najdeme vrchol v, který se opakuje:



Odebráním v vznikne víc komponent $\Rightarrow$ vyberu u, w z různých komp. a spojím hranou ↯

Lemma: V rovinné triangulaci platí $e = 3v - 6$.

Dk: Dosazením do Eulerovy formule:
$$\left.\begin{aligned} v + f &= e + 2 \\ 3f &= 2e \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} v + \tfrac{2}{3}e &= e + 2 \\ v - 2 &= \tfrac{1}{3}e \\ 3v - 6 &= e \end{aligned}$$

Věta: Nechť G je rovinný graf s aspoň 3 vrcholy. Potom $e \leq 3v - 6$. } opět $v := |V(G)|$, $e := |E(G)|$.

Dk: Přidáváme do G hrany, až vznikne max. rovinný $G' \supseteq G$.
Nakreslení G' je triangulace s $3v-6$ hranami.
$|E(G)| \leq |E(G')|$, tedy $e \leq 3v - 6$.

Důsledek: K_5 není rovinný: $v = 5$, $e = \binom{5}{2} = 10$, ale $3v - 6 = 9$.

Důsledek: V rovinném grafu je průměrný stupeň vrcholu < 6:
$$\frac{\sum_{u \in V(G)} \deg(u)}{v} = \frac{2e}{v} \leq \frac{2(3v-6)}{v} = \frac{6v - 12}{v} = 6 - \frac{12}{v} < 6.$$
} případy $v < 3$ ošetříme zvlášť

Důsledek: V rovinném grafu existuje vrchol stupně max. 5.

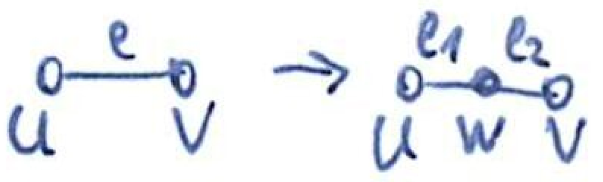
Rovinné grafy bez △ pro $v \geq 3$

Maximální grafy: stěny jsou C_4, C_5, případně celý graf je  (hvězda s aspoň 2 cípy)

z Eulerovy formule: $4f \leq 2e$, $f \leq \frac{1}{2}e$ $\Big\}$ $v + \frac{1}{2}e \geq e + 2$, $v - 2 \geq \frac{1}{2}e$ $\rightarrow$ $\boxed{e \leq 2v - 4}$ ← platí také

Proto: ① průměrný stupeň < 4
② existuje vrchol stupně max. 3
③ $K_{3,3}$ není rovinný: $v = 6$, $e = 9$, ale $2v - 4 = 8$.

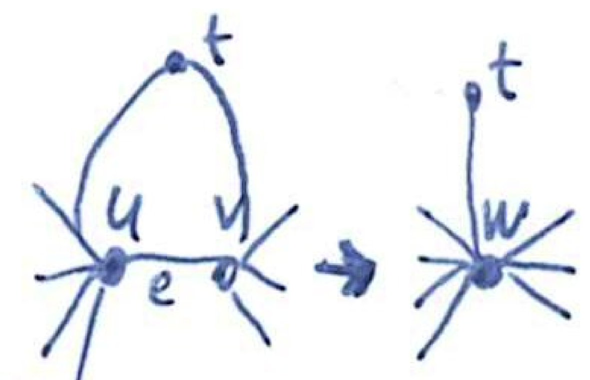
Operace zachovávající rovinnost

Dělení hrany: $G \% e$ 

dělení K_5 ani $K_{3,3}$ nemůže být rovinné

$V(G\%e) := V(G) \cup \{w\}$

$E(G\%e) := E(G) \setminus \{\{u,v\}\} \cup \{\{u,w\},\{w,v\}\}$

Kontrakce hrany $G . e$ 

$V(G.e) := V(G) \setminus \{u,v\} \cup \{w\}$

$E(G.e) := \left(E(G) \cap \binom{V(G.e)}{2}\right) \cup \left\{ \{x,w\} \;\middle|\; \{x,u\} \in E(G) \vee \{x,v\} \in E(G) \right\}$

nebo: $\cup \{ e \setminus \{u,v\} \cup \{w\} \mid e \in E(G), |e \cap \{u,v\}| = 1 \}$

Věta (Kuratowského): G není rovinný $\Leftrightarrow$ G má podgraf izomorfní dělení K_5 nebo $K_{3,3}$.

lze ho získat opakovaným dělením hran z ...

(zatím bez důkazu)

Poznámka: Dokonce platí G je rovinný $\Leftrightarrow$ G má nakreslení lomenými čarami $\Leftrightarrow$ G má nakreslení úsečkami.

Problém 4 barev (1852): Politickou mapu jde obarvit 4 barvami tak, aby žádné 2 sousední státy neměly stejnou barvu.

nenulová délka společné hranice (tj. ne bod)

↳ barvíme stěny topologického rovinného grafu tak, aby stěny sousedící hranou neměly stejnou barvu → převedeme na barvení vrcholů (spojeny hranou ⇒ různé barvy)

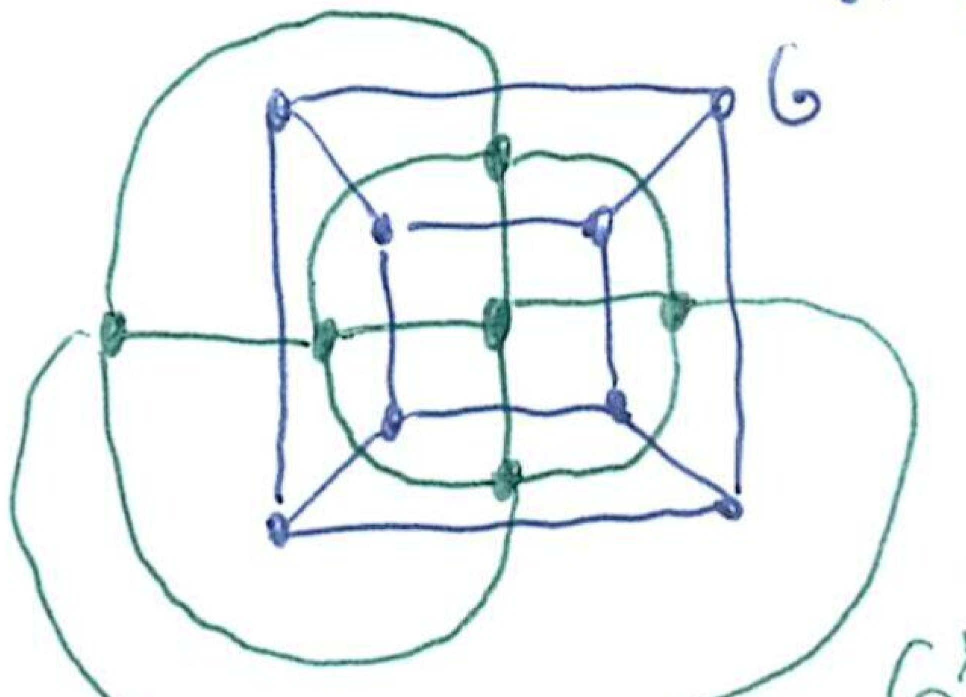
Df: Duální graf G^* k topolog. rov. grafu G:

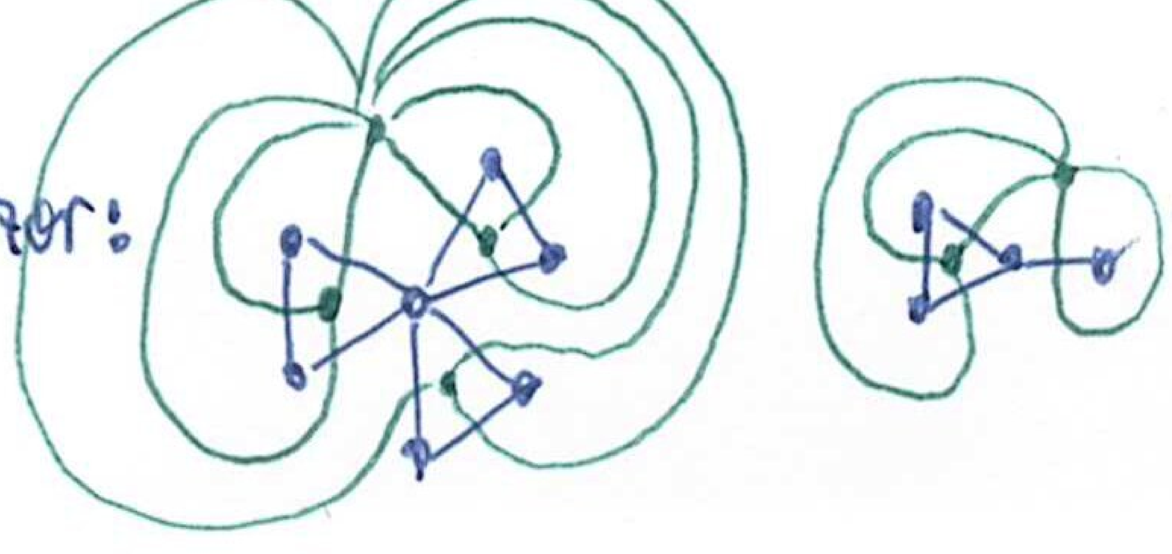
$V(G^*) :=$ stěny G

$\{f,g\} \in E(G^*) \equiv$ stěny f,g sousedí v G hranou

přesněji: za každou hranu v G přidám hranu do G^* spojující stěny G oddělené hranou

G^* je také rovinný, prohodí se stěny ↔ vrcholy, hrany se zachovají] Eulerova formule je symetrická vůči $v \leftrightarrow f$



ale pozor: 

Duál je obecně multigraf se smyčkami a násobnými hranami