Podobně: Ostré uspořádání $a < b \equiv a \leq b \;\&\; a \neq b$
ireflexivní ($\forall x\; x \not< x$), antisymetrické, tranzitivní

Příklady:

1. $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární
2. $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární
3. id_X žádné 2 různé prvky nejsou porovnatelné
4. $(\mathbb{N}^+, \backslash)$ - dělitelnost $2\backslash 4$, $4\backslash 12$, ale $4, 6$ neporovnatelné
   pozor: $\backslash$ na $\mathbb{Z}$ není uspoř., protože $-2\backslash 2 \;\&\; 2\backslash -2$
5. $(2^X, \subseteq)$ – inkluze množin pro $X = \{1,2,3\}$: $\{1\} \subseteq \{1,3\}$, kdežto $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ neporov.
6. lexikografické uspořádání: pro $(A, \leq)$ ČUM definujeme $\leq_{LEX}$ na A^2:
   $(x_1, x_2) \leq_{LEX} (y_1, y_2) \equiv x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \;\&\; x_2 \leq y_2)$
   - na A^k: $(x_1 - x_k) \leq_{LEX} (y_1 - y_k) \equiv x_1 - x_k = y_1 - y_k \;\vee$
     $\exists i: 1 \leq i \leq k \;\&\; x_1 = y_1 \;\&\; \dots \;\&\; x_{i-1} = y_{i-1} \;\&\; x_i < y_i$
   - na A^* (množina všech konečných posloupností prvků z A, tedy řetězců znaků z A):
     $(x_1 - x_k) \leq_{LEX} (y_1 - y_\ell)$ pro $n := \min(k, \ell)$ je
     $(x_1 - x_n) <_{LEX} (y_1 - y_n) \;\vee$
     $(x_1 - x_n) = (y_1 - y_n) \;\&\; k \leq \ell$
     $ab < abc < ac$

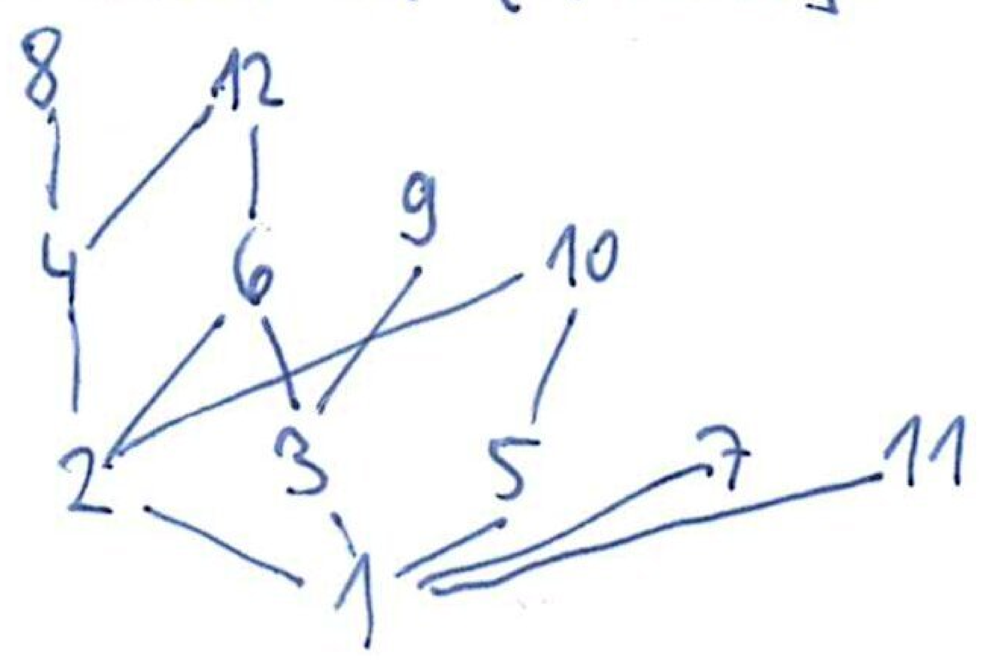
Znázornění: Hasseův diagram

např.

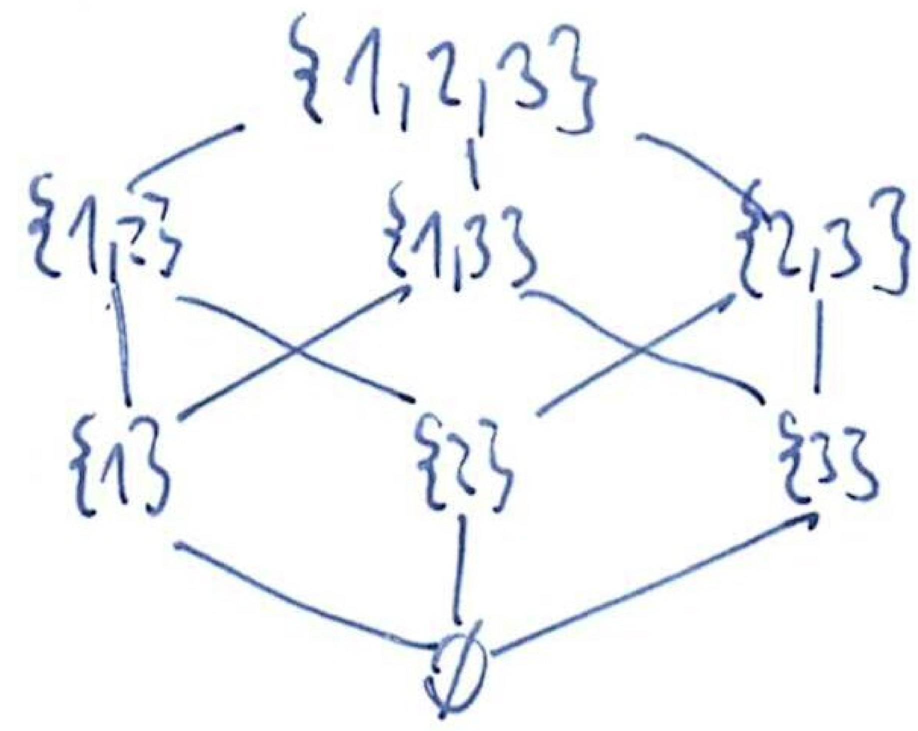
co je nahoře, je větší & hrany plynoucí z tranzitivity nekreslíme

Df: Relace bezprostředního předchůdce pro ČUM $(X, \leq)$ je $\lhd$ na X t.ž.
$\forall x, y \in X: x \lhd y \equiv x < y \;\&\; \nexists z \in X: x < z \;\&\; z < y$

- Pro dělitelnost na $\{1 - 12\}$:



- Pro $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$:



Df: Pro ČUM $(X, \leq)$ je prvek $x \in X$:

- nejmenší $\equiv \forall y \in X: x \leq y$ — existuje nejvýše jeden
- minimální $\equiv \nexists y \in X: y < x$
- podobně největší a maximální

v lineárně uspoř. množině je nejmenší totéž co minimální, obecně nejmenší $\Rightarrow$ minimální, ale ne naopak.

Df: $A \subseteq X$ je:

- řetězec $\equiv \forall a, b \in A$ jsou porovnatelné
- antiřetězec $\equiv \forall a, b \in A$, $a \neq b$ jsou neporovnatelné

množina všech min. prvků tvoří antiřetězec

Věta: Každá konečná neprázdná ČUM má aspoň 1 minimální prvek.

pro nekonečné zjevně neplatí – viz třeba $(\mathbb{Q}, \le)$

Dk #1: Nechť $(X, \le)$ je ČUM.
Zvolme $x_1 \in X$ libovolně.
Pokud x_1 není min., existuje $x_2 < x_1$.
Pokud x_2 není min., existuje $x_3 < x_2$.
Atd. Přitom $x_1, x_2, \dots$ jsou navzájem různá: pokud $x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \dots > x_i$, pak z tranzitivity $x_i > x_i$, což je ve sporu s ireflexivitou.
Ale posl. nemůže pokračovat do nekonečna, neboť X je konečná.

Dk #2: Ke každému $x \in X$ přiřadíme $L_x := \{y \in X \mid y \le x\}$, zjevně $x \in L_x$.
tomu se říká dolní množina prvku x
Zvolíme $a \in X$: $|L_a|$ je min.
Pokud $|L_a| = 1$, a je minimální prvek.
Pokud $|L_a| > 1$, vybereme $b \in L_a \setminus \{a\}$ … $L_b \subseteq L_a \setminus \{a\}$ díky tranzitivitě a antisymetrii
$\Rightarrow |L_b| < |L_a|$, což je spor s min. $|L_a|$.

$\le^{-1}$ je také uspořádání (opačné) – prohodili jsme min/max, nejv./nejm. atd.

Věta (o lineárním rozšíření): Pro každou konečnou $(X, \le)$ ČUM $\exists \preceq$ lineární uspoř. na X t.ž. $\le \subseteq \preceq$.
pro nekonečné je to složitější a potřebujeme axiom výběru

Dk: Indukcí podle $n := |X|$.
Pro $n = 0$: stačí zvolit $\preceq = \emptyset$.
$n \to n+1$: $(X, \le)$ má nějaký nejmenší prvek $m \in X$.
Zvolíme $X' := X \setminus \{m\}$, $\le' := \le \cap X' \times X'$.
$(X', \le')$ je ČUM s n prvky $\Rightarrow$ podle IP existuje lineární rozšíření $\preceq'$.
Sestavíme $\preceq := \preceq' \cup \{(m, x) \mid x \in X\}$
a nahlédneme, že $\preceq$ je lin. uspoř. rozšiřující $\le$.

Grafový pohled – konečné neprázdné ČUM jsou acyklické orientované grafy se smyčkami,
→ ostré uspořádání je bez smyček
jediné povolené cykly
které jsou navíc tranzitivní ≡ kdykoliv existuje cesta z x, y, pak (x, y) je hrana.
každá cesta má zkratku

Lineární rozšíření je tzv. topologické uspořádání $\le$ na V t.ž. $(x, y) \in E \Rightarrow x \le y$.
"Srovnáme vrcholy na přímku vodorovnou tak, aby všechny hrany vedly zleva doprava."

Ještě přidáme v analýze často používané:

Df: Pro $A \subseteq X$, kde $(X, \le)$ je ČUM:
- $s \in X$ je horní závora A ≡ $\forall a \in A: a \le s$
- $s \in X$ je supremum A ≡ s je nejmenší z horních závor A.
- analogicky dolní závora a infimum (největší dolní závora)

je jednoznačně určeno, existuje-li

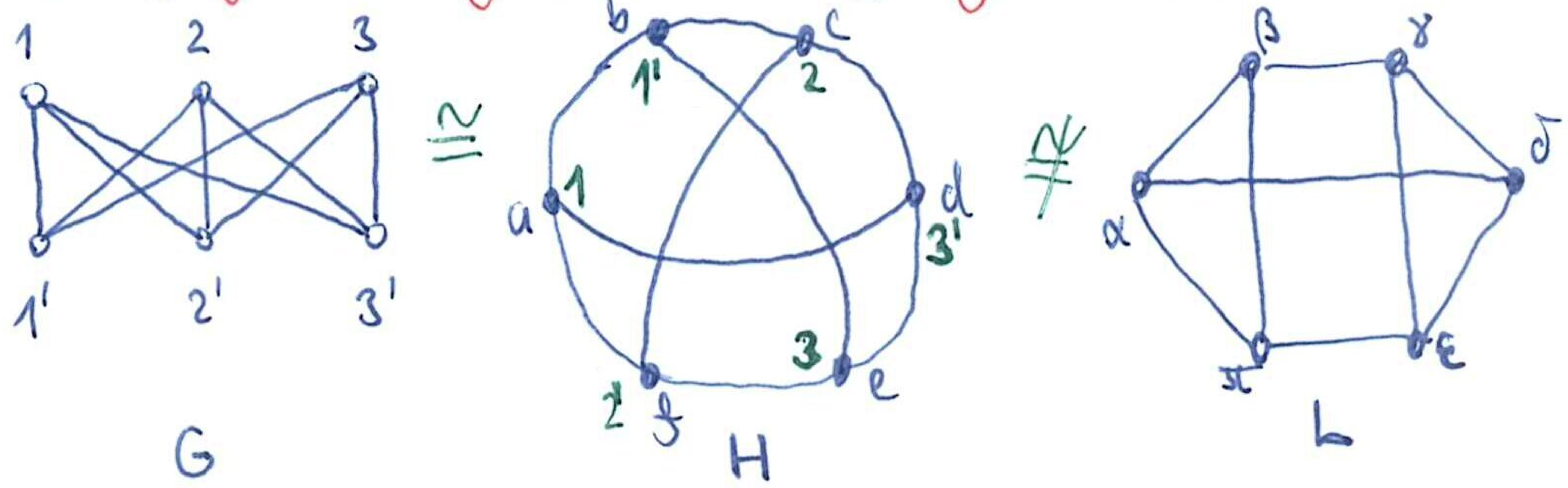
např. v $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \mid)$ je $\sup\{a, b\}$ nejmenší společný násobek a $\inf\{a, b\}$ největší společný dělitel. (funguje i pro větší množiny)

Izomorfismus – "jedna struktura vypadá jako druhá" – potkali jsme pro grafy, teď pořádně a obecněji

Df: Grafy $G=(V,E)$ a $G'=(V',E')$ jsou <u>izomorfní</u> (značíme $G \cong G'$) $\equiv$
$\exists f: V \to V'$ bijekce t.ž. $\forall x,y \in V: \{x,y\} \in E \Leftrightarrow \{f(x), f(y)\} \in E'$. } f nazýváme <u>izomorfismus</u> mezi G a G'

f říká, jak přejmenovat grafu G vrcholy, aby vznikl G'!

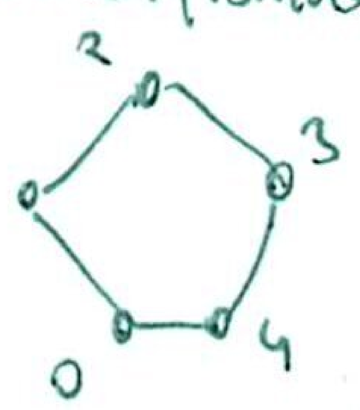
Příklad:



- $G \cong H$ sestrojením izomorfismu
- $G \ncong K_5$: mají jiný # vrcholů
- $G \ncong K_6$: mají jiné stupně
- $G \ncong L$: G je bipartitní, L má Δ

} obecně: izomorfismus zachovává všechny vlastnosti, které nezáleží na jménech vrcholů

Df: <u>automorfismus</u>
Je izomorfismus G s G.



má kromě identity 9 dalších automorfismů

Pozn.: Ověřit, jestli f je izomorfismus, je algoritmicky jednoduché, ale rozhodnout, zda nějaký existuje, je nejspíš těžké!

- Podobně můžeme izomorfismus definovat pro <u>orientované grafy</u>:
  $f: V \to V'$ bijekce : $\forall x,y \in V: (x,y) \in E \Leftrightarrow (f(x), f(y)) \in E'$.
- Nebo pro <u>uspořádání</u>: ČUM $(X, \preceq) \cong (X', \preceq') \equiv$
  $\exists f: X \to X'$ bijekce: $\forall x,y \in X: x \preceq y \Leftrightarrow f(x) \preceq' f(y)$.

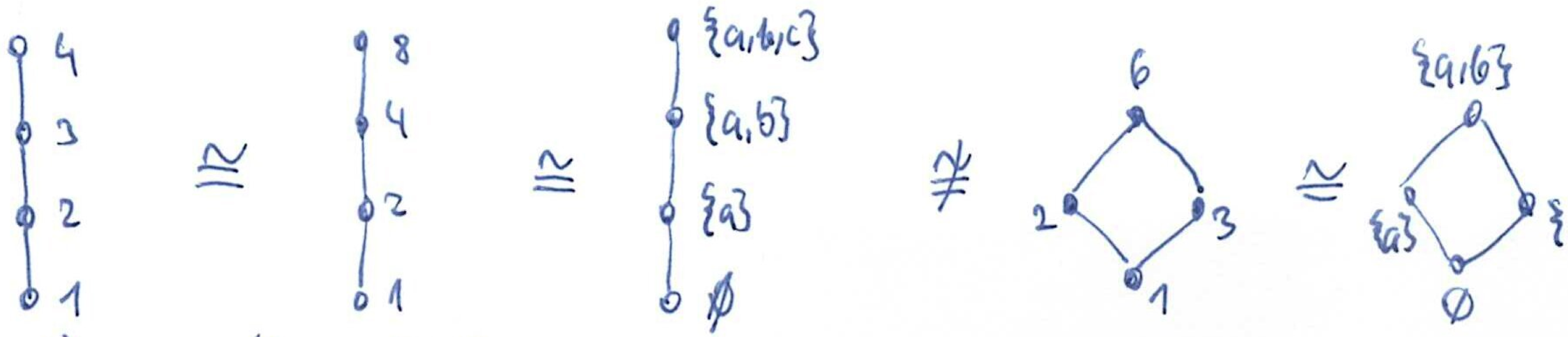
↳ obecněji: $(X, R_1 \ldots R_k) \cong (X', R'_1 \ldots R'_k) \equiv \exists f: X \to X'$ bijekce kompatibilní s relacemi $R_1 \ldots R_k$, tedy
$\forall i$ $\text{arita}(R_i) = \text{arita}(R'_i) =: a_i$ ← kolika-tice jsou v relaci
$\forall x_1 \ldots x_{a_i} \in X$
$(x_1 \ldots x_{a_i}) \in R_i \Leftrightarrow (f(x_1) \ldots f(x_{a_i})) \in R'_i$.

↑ množina + k relací na ní "relační systém"

Například: $(\mathbb{R}, 0, +) \cong ((0,\infty), 1, \cdot)$
↑ konstanta je unární relace ↑ + a · jsou ternární relace

izomorfismus je $x \mapsto e^x$

Zpět k <u>izomorfismům uspořádání</u>:



$([4], \leq)$ $\quad$ $(\{1,2,4,8\}, \backslash)$ $\quad$ uspoř. $\subseteq$ $\quad$ $\backslash$ $\quad$ $\subseteq$

Nebo pro nekonečné ČUM:

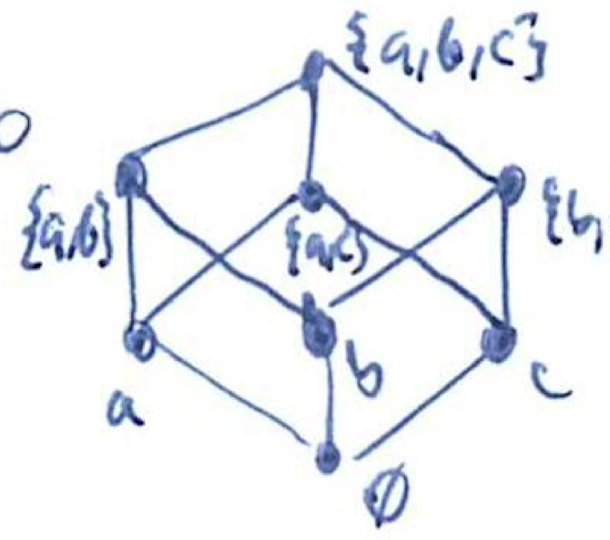
Mezi $\mathbb{N}^+$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ a $\mathbb{Q}$ existují bijekce, ale:

- $(\mathbb{N}^+, \leq) \cong (\mathbb{N}, \leq)$, zatímco
- $(\mathbb{N}, \leq) \not\cong (\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z})$ – jedna ČUM má nejmenší prvek, druhá ne
- $(\mathbb{Z}, \leq_\mathbb{Z}) \not\cong (\mathbb{Q}, \leq_\mathbb{Q})$ – uspoř. na $\mathbb{Q}$ je husté ($\forall x,y\ x<y \Rightarrow \exists z: x<z \,\&\, z<y$), zatímco na $\mathbb{Z}$ nikoliv

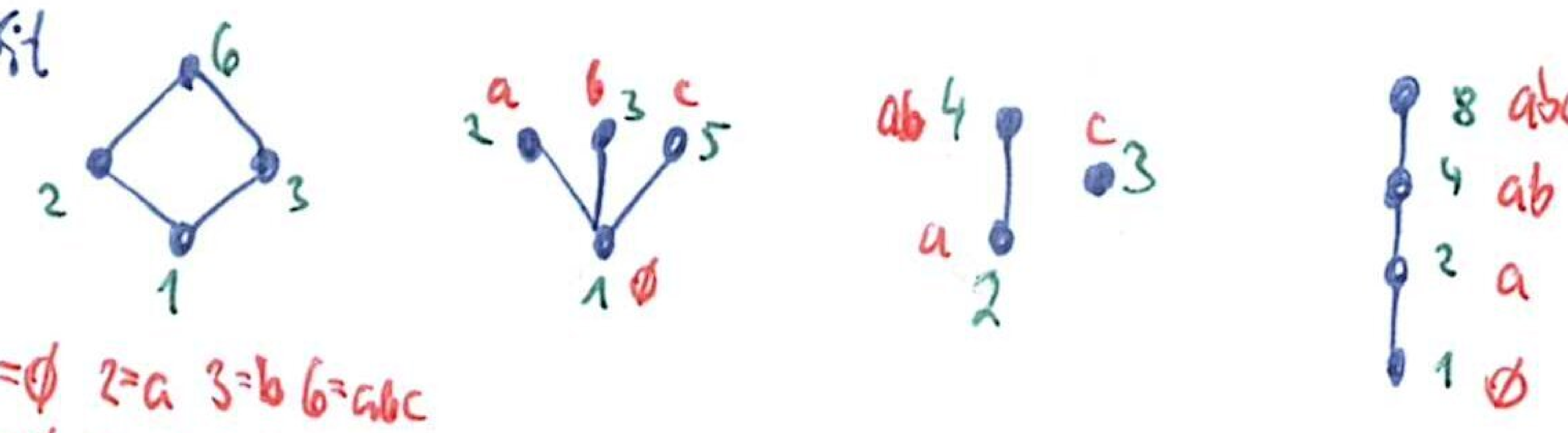
"Každé uspořádání lze najít někde uvnitř inkluze."

Df: Vnoření $(X, \leq)$ do $(X', \leq')$ je $f: X \to X'$ prosté t. ž. $\forall x,y \in X: x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq' f(y)$. } vlastně izomorfismus X s nějakou indukovanou podstrukturou v X'

Příklady: Do



lze vnořit (dělitelnost)



$1=\emptyset$ $2=a$ $3=b$ $6=abc$

ale i $1=\emptyset$ $2=ab$ $3=bc$ $6=abc$

Věta (o vložení do inkluze): Pro každou $(X, \preceq)$ ČUM existuje vložení do $(2^X, \subseteq)$.
i nekonečnou

Dk: Stačí zvolit $f(x) := L_x = \{ y \in X \mid y \preceq x \}$ (dolní množiny – už známe)

1. f je prostá: pokud $L_x = L_y$, pak z $x \in L_x$, $y \in L_y$ plyne $x \in L_y$ & $y \in L_x$, tedy $x \preceq y$ & $y \preceq x$, což dá tranzitivitou $x = y$.
2. $x \preceq y \Rightarrow f(x) \subseteq f(y)$: pokud $a \in L_x$, pak $a \preceq x$ a z tranzitivity $a \preceq y$, tedy $a \in L_y$.
3. $f(x) \subseteq f(y) \Rightarrow x \preceq y$: $x \in L_x \Rightarrow x \in L_y \Rightarrow x \preceq y$.

Vraťme se ještě k řetězcům a antiřetězcům: Jak dlouhé mohou být?

Df: Pro konečnou ČUM $P = (X, \preceq)$ je:

- $\alpha(P) := \max\{ |A| \mid A \subseteq X$ je antiřetězec$\}$ – "šířka"
- $\omega(P) := \max\{ |R| \mid R \subseteq X$ je řetězec$\}$ – "výška"

} uspořádání

Pro "krychličku" z minulých příkladů je $\alpha = 3$, $\omega = 4$

Věta (o Dlouhém a Širokém): Pro každou konečnou ČUM $P = (X, \preceq)$ je $\alpha(P) \cdot \omega(P) \geq |X|$.

Dk: Sestrojíme: $X_1 :=$ minimální prvky $(X, \preceq)$, $X_1' := X \setminus X_1$

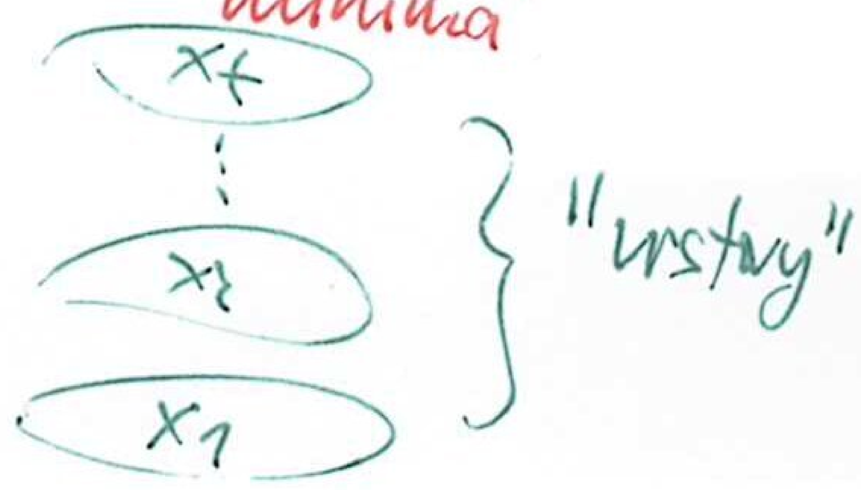
$X_2 :=$ min. prvky $(X_1', \preceq_1)$, $X_2' := X_1' \setminus X_2$

$\preceq$ omezené na X_1'

$\vdots$

X_t takové, že $X_t' = \emptyset$

"postupně ukrajujeme minima"



1. proces skončí: $|X_i'| > |X_{i+1}'|$, takže prvky časem dojdou
2. $X_1 - X_t$ tvoří rozklad množiny X.

③ každá X_i je antiřetězec $\Rightarrow \forall i \; |X_i| \leq \alpha(P)$

④ existuje řetězec délky $t \Rightarrow t \leq \omega(P)$

└ proč: zvolme $a_t \in X_t$ libovolně

$a_t \notin X_{t-1}$, proto musí existovat $a_{t-1} \in X_{t-1}$ t.ž. $a_{t-1} < a_t$.

$a_{t-1} \notin X_{t-2} \Rightarrow \exists\, a_{t-2} \in X_{t-2}$ t.ž. $a_{t-2} < a_{t-1}$

atd. až do $a_1 \in X_1$.

$\{a_1 \ldots a_t\}$ tvoří řetězec.

z ②–④ plyne: $|X| = \sum_i |X_i| \leq t \cdot \alpha(P) \leq \omega(P) \cdot \alpha(P)$, což je tvrzení věty.

Aplikace: Věta (Erdős-Szekeres): Posloupnost čísel délky n^2+1 obsahuje monotónní podposloupnost délky $n+1$.

už jsme zmínili na začátku semestru

neostře, tedy nerostoucí nebo neklesající

Dk: Mějme $x_1 \ldots x_{n^2+1} \in \mathbb{R}$.

Na $[n^2+1]$ zvolme relaci $\preceq$: $i \preceq j \equiv i \leq j \;\&\; x_i \leq x_j$

① $\preceq$ je uspořádání.

② řetězec odpovídá neklesající pp., antiřetězec nerostoucí pp.

Stačí aplikovat D&Š.
