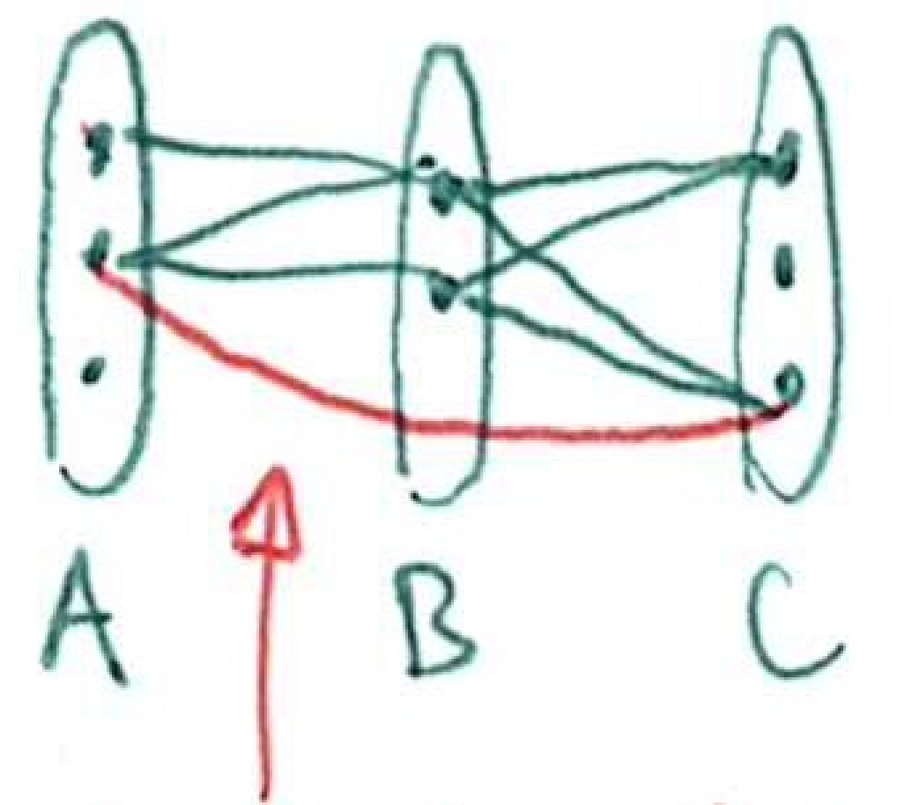
Df: Inverzní relace: Je-li R relace mezi A, B, pak $R^{-1} := \{(b,a) \mid (a,b) \in R\}$ je relace mezi B, A. } tedy $aRb \Leftrightarrow bR^{-1}a$

Df: Skládání relací: Je-li R relace mezi A, B a S mezi B, C, pak $R \circ S := \{(a,c) \mid a \in A, c \in C : \exists b \in B : aRb \,\&\, bSc\}$



"zkratka" za každou cestu A→B→C

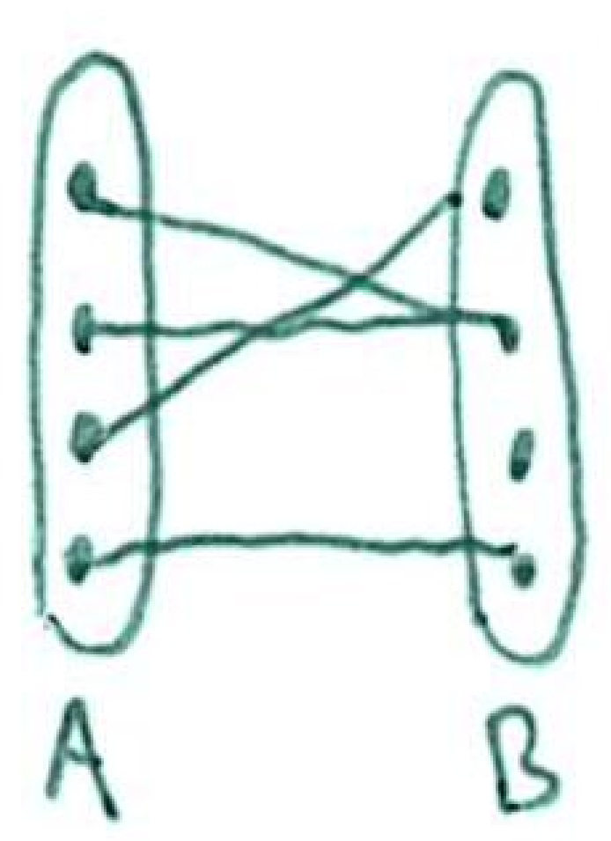
👁 $R \circ id_B = R$, $id_A \circ R = R$

Df: Funkce (neboli zobrazení) z A do B je relace f mezi A a B t.ž. $\forall a \in A\ \exists! b \in B : afb$. } značíme $f: A \to B$

$f(x) := y$ t.ž. xfy (jednoznačně určené)

👁 id_A je identické zobrazení

Df: $f: A \to B$ je
- prostá (injektivní) $\equiv \forall a, a' \in A : f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'$
- na (surjektivní) $\equiv \forall b \in B\ \exists a \in A : f(a) = b$
- vzájemně jednoznačná (1-1, bijektivní) $\equiv$ prostá & na



je to funkce: $\deg(a) = 1$ pro $a \in A$

prostá: $\deg(b) \leq 1$

na: $\deg(b) \geq 1$

Příklady: ① $\sin : \mathbb{R} \to [-1,1]$ (nebo $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) ② $\mathrm{sgn} : \mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ (pro $x<0$, pro $x>0$) ③ $\mathrm{card} : 2^{\mathbb{N}} \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ mohutnost množiny (kardinalita) ④ $f : A \times B \to C$ funkce dvou proměnných

👁 Je-li $f: A \to B$, $g: B \to C$, pak $f \circ g$ je funkce z A do C, kde $(f \circ g)(x) = g(f(x))$

↖ nebo je to $g \circ f$? Lidé se neshodnou...

👁 Pro $f: A \to B$ je f^{-1} funkce $\Leftrightarrow$ f je bijekce

---

Motivace: Snažíme se zobecnit rovnost / geom. shodnost

Df: Relace R na množině A je:
- reflexivní $\equiv \forall a \in A : aRa$ $\leftarrow id_A \subseteq R$
- symetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \Rightarrow bRa$ $\leftarrow R = R^{-1}$
- tranzitivní $\equiv \forall a, b, c \in A : aRb \,\&\, bRc \Rightarrow aRc$ $\leftarrow R \circ R \subseteq R$ příklady: $x<y$, $x=y$
- antisymetrická $\equiv \forall a, b \in A : aRb \,\&\, bRa \Rightarrow a = b$ $\leftarrow R \cap R^{-1} \subseteq id_A$

Df: Relace R na A je ekvivalence $\equiv$ je reflexivní & symetrická & tranzitivní.

Značení: často $\equiv$, $\approx$, $\sim$, $\cong$ apod. "různá rovnítka"

Příklady:
① rovnost na $\mathbb{N}$
② rovnost modulo n
③ geometrická shodnost
④ geom. podobnost
⑤ podmnožiny $\mathbb{N}$ jsou stejně velké (card(X) = card(Y) $\Leftrightarrow$ existuje bijekce $X \to Y$)
⑥ dosažitelnost v neorientovaných grafech
↖ relace na V, $xRy \equiv \exists$ cesta mezi x, y
⑦ obousměrná dosažitelnost v orient. grafech
↖ $xRy \equiv \exists$ cesta $x \to y$ & $\exists$ cesta $y \to x$

Df: Ekvivalenční třída prvku $x \in A$: $R[x] := \{a \in A \mid \underset{\sim}{aRx}\}$

nebo xRa … to je díky symetrii totéž

👁 $\forall x \in A: x \in R[x]$ díky reflexivitě

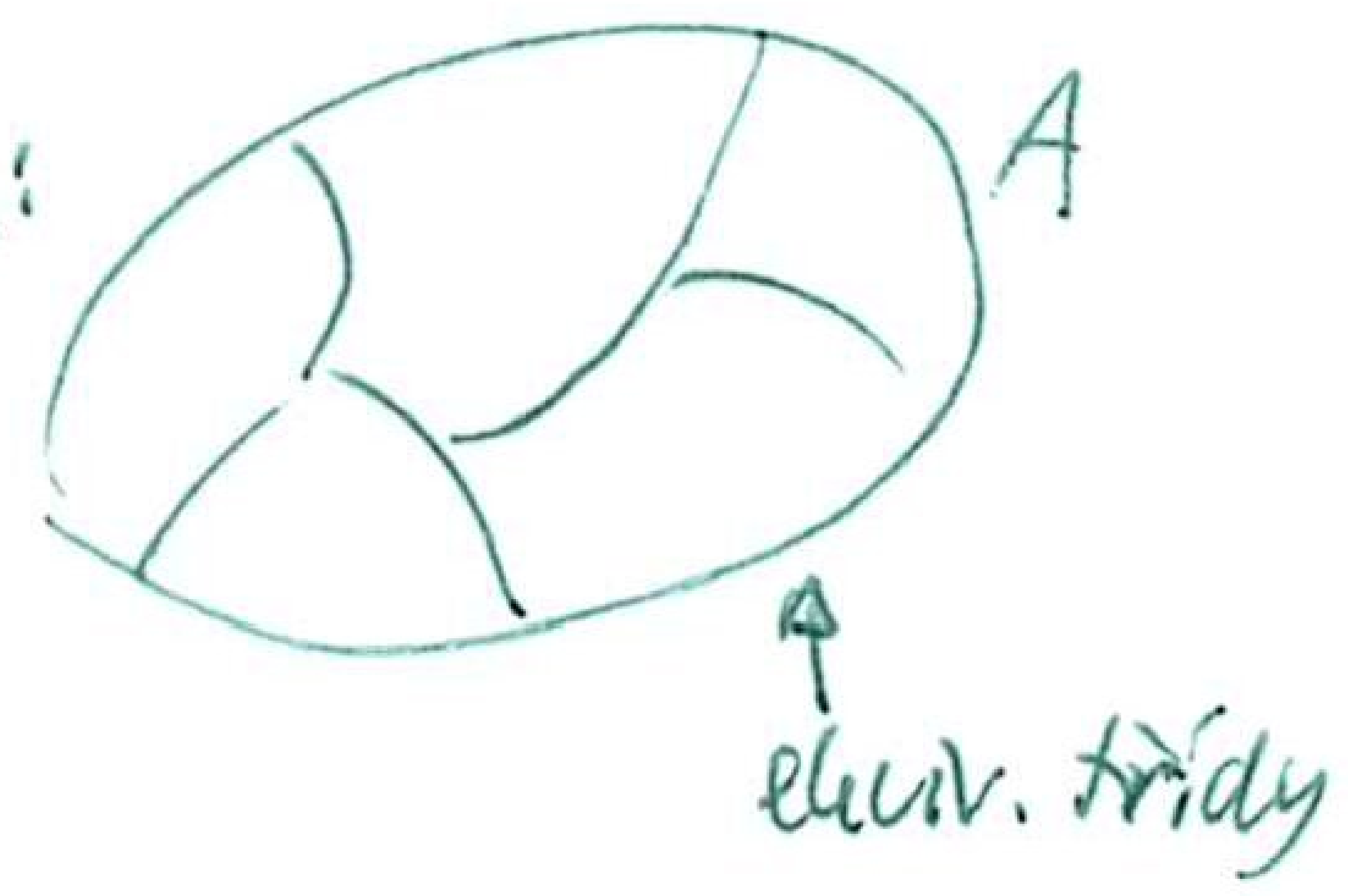
Nechť R je ekvivalence na množině A.

Věta: ① $\forall x \in A: R[x] \neq \emptyset$.

② $\forall x,y \in A$: buď $R[x] = R[y]$, nebo $R[x] \cap R[y] = \emptyset$.

③ $\{R[x] \mid x \in A\}$ jednoznačně určuje R.

Představa:

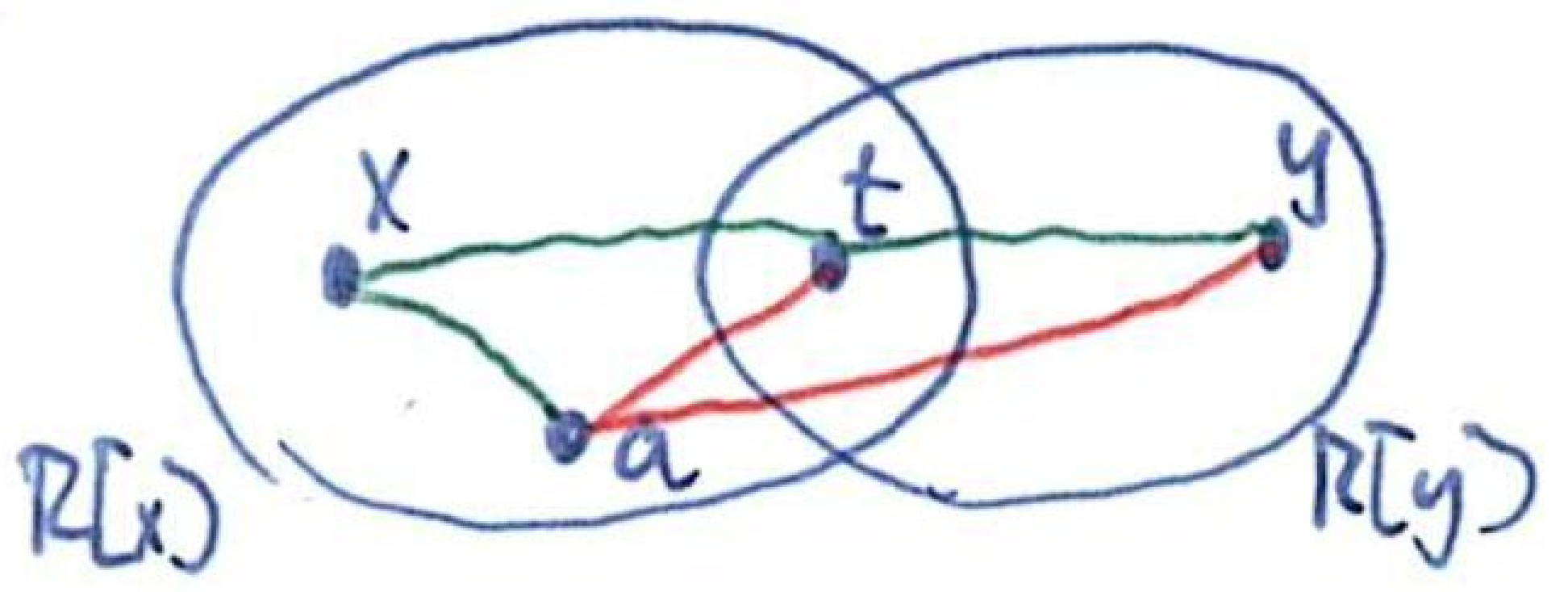


Dk: ① triviální díky $x \in R[x]$

② ukážeme, že pokud $R[x] \cap R[y] \neq \emptyset$, pak $R[x] \subseteq R[y]$ … prohozením x,y získáme $R[x] \supseteq R[y]$ a zkombinováním inkluzí rovnost.

Nechť $\underbrace{t \in R[x] \cap R[y]}_{tRx \,\&\, tRy}$ a $\underbrace{a \in R[x]}_{\text{tedy } aRx}$. Ukážeme, že $\underbrace{a \in R[y]}_{aRy}$.

Obrázkem:



$$\begin{tikzcd}
aRx \arrow[rr, bend left] & & aRt \arrow[r] & aRy \\
tRx \arrow[r, Rightarrow] & xRt \arrow[ur] & tRy \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

③ xRy rozhodneme podle $x \in R[y]$.

👁 Třídy pro naše příklady ekvivalencí: ② rovnost mod n → n zbytkových tříd

⑥ neorient. dosažitelnost → komponenty souvislosti

⑦ orient. — " — → — " — silné souvislosti

Df: Množinový systém $\mathcal{S} \subseteq 2^X$ je rozklad množiny $X \equiv$

① $\forall A \in \mathcal{S}: A \neq \emptyset$

② $\forall A,B \in \mathcal{S}: A \neq B \Rightarrow A \cap B = \emptyset$

③ $\bigcup_{A \in \mathcal{S}} A = X$

ekviv. třídy tvoří rozklad; naopak ke každému rozkladu vytvoříme ekvivalenci "být v téže třídě", tedy $aRb \equiv \exists A \in \mathcal{S}: \{a,b\} \subseteq A$

👁 Pozor, někdy se více hodí rozklad dovolující prázdné třídy, třeba u bipart. grafů rozklad V.

Na okraj: Relace typu "být si blízko" nebývají ekvivalence – nejsou tranzitivní. Třeba na $\mathbb{R}$: $xBy \equiv |x-y| \leq 1$. Tehdy 1B2 a 2B3, ale ¬1BB.

Motivace: Teď zkusíme zobecnit "je menší (nebo rovno)"

Df: Relace R na množině A je (částečné) uspořádání ≡ R je reflexivní, antisymetrická a tranzitivní.

Df: Prvky $a,b \in A$ jsou porovnatelné ≡ aRb nebo bRa.

Často značíme $\leq, \preceq, \sqsubseteq$ apod.

Uspořádání je lineární (úplné) ≡ každé 2 prvky jsou porovnatelné.

Df: Částečně uspořádaná množina (ČUM) je dvojice (A,R), kde A je množina a R uspořádání na A.

Podobně: Ostré uspořádání $a < b \equiv a \leq b \;\&\; a \neq b$

↳ ireflexivní ($\forall x\; x \not< x$), antisymetrické, tranzitivní

Příklady:

① $(\mathbb{N}, \leq)$ lineární

② $(\mathbb{Q}, \leq)$ lineární

③ id_X žádné 2 různé prvky nejsou porovnatelné

④ $(\mathbb{N}^+, \backslash)$ - dělitelnost $2 \backslash 4$, $4 \backslash 12$, ale $4, 6$ neporovnatelné

pozor: $\backslash$ na $\mathbb{Z}$ není uspoř., protože $-2 \backslash 2 \;\&\; 2 \backslash -2$

⑤ $(2^X, \subseteq)$ - inkluze množin pro $X = \{1,2,3\}$: $\{1\} \subseteq \{1,3\}$, kdežto $\{1,3\}, \{2,3\}$ neporov.

⑥ lexikografické uspořádání: pro $(A, \leq)$ ČUM definujeme $\leq_{LEX}$ na A^2:

$$(x_1, x_2) \leq_{LEX} (y_1, y_2) \equiv x_1 < y_1 \vee (x_1 = y_1 \;\&\; x_2 \leq y_2)$$

- na A^k: $(x_1 - x_k) \leq_{LEX} (y_1 - y_k) \equiv x_1 - x_k = y_1 - y_k \;\vee$

  $\exists i: 1 \leq i \leq k \;\&\; x_1 = y_1 \;\&\; \dots \;\&\; x_{i-1} = y_{i-1} \;\&\; x_i < y_i$
- na A^* (množina všech konečných posloupností prvků z A, tedy řetězců znaků z A):

  $(x_1 - x_k) \leq_{LEX} (y_1 - y_l)$ pro $n := \min(k, l)$ je

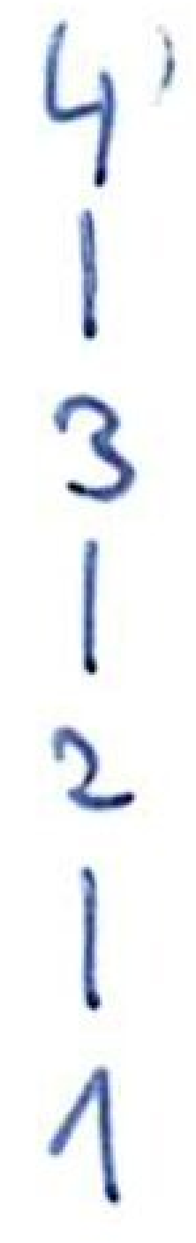
  $(x_1 - x_n) <_{LEX} (y_1 - y_n) \;\vee$

  $(x_1 - x_n) = (y_1 - y_n) \;\&\; k \leq l$

  } $ab < abc < ac$

Znázornění: Hasseův diagram

např.

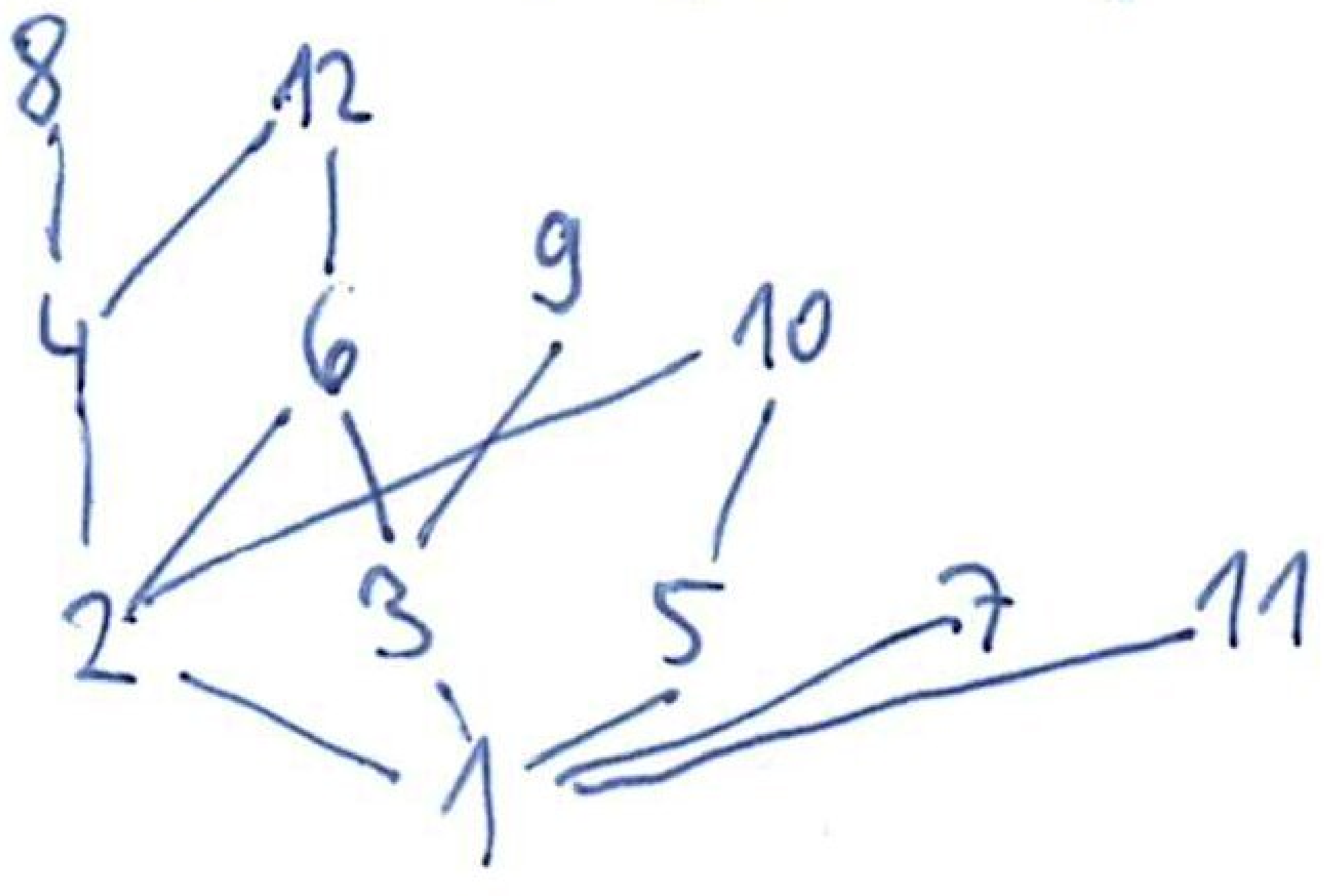


co je nahoře, je větší & hrany plynoucí z tranzitivity nekreslíme

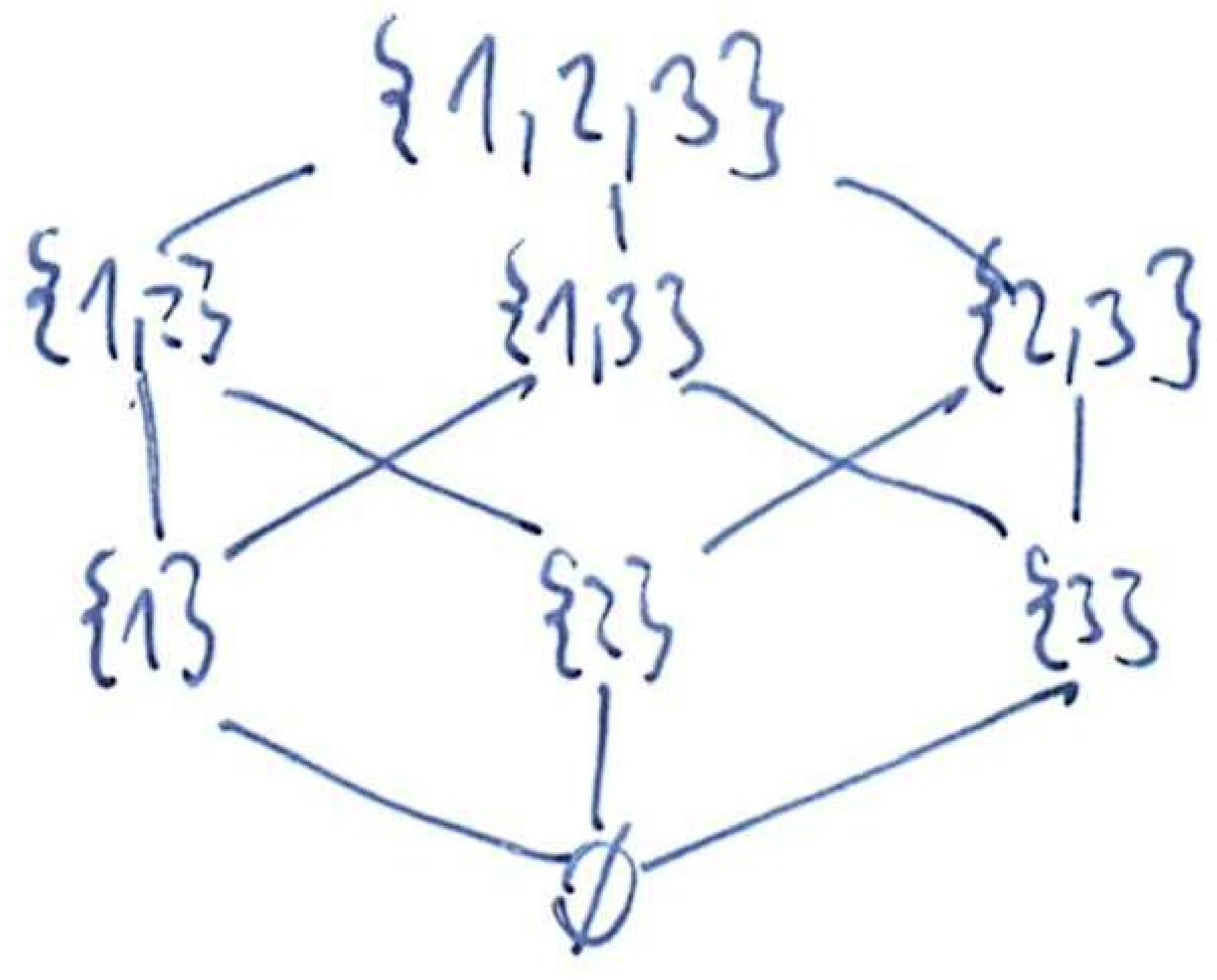
Df: Relace bezprostředního předchůdce pro ČUM $(X, \leq)$ je $\lhd$ na X t.ž.

$\forall x, y \in X: x \lhd y \equiv x < y \;\&\; \nexists z \in X: x < z \;\&\; z < y$

- Pro dělitelnost na $\{1 - 12\}$:



- Pro $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$:



Df: Pro ČUM $(X, \leq)$ je prvek $x \in X$:

- nejmenší $\equiv \forall y \in X: x \leq y$ 👁 existuje nejvýše jeden
- minimální $\equiv \exists y \in X: y < x$
- podobně největší a maximální

👁 v lineárně uspoř. množině je nejmenší totéž co minimální, obecně nejmenší ⇒ minimální, ale ne naopak.

Df: $A \subseteq X$ je:

- řetězec $\equiv \forall a, b \in A$ jsou porovnatelné
- antiřetězec $\equiv \forall a, b \in A$, $a \neq b$ jsou neporovnatelné

👁 množina všech min. prvků tvoří antiřetězec

Věta: Každá konečná neprázdná ČUM má aspoň 1 minimální prvek.

↓ pro nekonečné zjevně neplatí – viz třeba $(\mathbb{Q}, \leq)$

Dk #1: Nechť $(X, \leq)$ je ČUM.

Zvolme $x_1 \in X$ libovolně.

Pokud x_1 není min., existuje $x_2 < x_1$.

Pokud x_2 není min., existuje $x_3 < x_2$.

Atd. Přitom $x_1, x_2, \ldots$ jsou navzájem různá: pokud $x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \ldots > x_i$, Pak z tranzitivity $x_i > x_i$, což je ve sporu s ireflexivitou.

Ale posl. nemůže pokračovat do nekonečna, neboť X je konečná.

Dk #2: Ke každému $x \in X$ přiřadíme $L_x := \{y \in X \mid y \leq x\}$, zjevně $x \in L_x$.

Zvolíme $a \in X$: $|L_a|$ je min.

Pokud $|L_a| = 1$, a je minimální prvek.

Pokud $|L_a| > 1$, vybereme $b \in L_a \setminus \{a\}$ … $L_b \subseteq L_a \setminus \{a\}$ díky tranzitivitě a antisymetrii

$\Rightarrow |L_b| < |L_a|$, což je spor s min. $|L_a|$.

Věta (o lineárním rozšíření): Pro každou (konečnou) $(X, \leq)$ ČUM $\exists \preceq$ lineární uspoř. na X t.ž. $\leq \subseteq \preceq$.

pro nekonečné je to složitější a potřebujeme axiom výběru

Dk: Indukcí podle $n := |X|$.

Pro $n = 0$: stačí zvolit $\preceq = \emptyset$.

$n \to n+1$: $(X, \leq)$ má nějaký nejmenší prvek $m \in X$.

Zvolíme $X' := X \smallsetminus \{m\}$, $\leq' := \leq \cap X' \times X'$.

$(X', \leq')$ je ČUM s n prvky $\Rightarrow$ podle IP existuje lineární rozšíření $\preceq'$.

Sestavíme $\preceq := \preceq' \cup \{(m, x) \mid x \in X\}$

a nahlédneme, že $\preceq$ je lin. uspoř. rozšiřující $\leq$.

Grafový pohled – konečné neprázdné ČUM jsou acyklické orientované grafy se smyčkami (jediné povolené cykly),

které jsou navíc tranzitivní ≡ kdykoliv existuje cesta z x, y, Pak (x, y) je hrana. } každá cesta má zkratku

Lineární rozšíření je tzv. topologické uspořádání $\leq$ na V t.ž. $(x, y) \in E \Rightarrow x \leq y$.

"Srovnáme vrcholy na (vodorovnou) přímku tak, aby všechny hrany vedly zleva doprava."

Ještě přidáme v analýze často používané:

Df: Pro $A \subseteq X$, kde $(X, \leq)$ je ČUM:

- $s \in X$ je horní závora A ≡ $\forall a \in A: a \leq s$
- $s \in X$ je supremum A ≡ s je nejmenší z horních závor A.
- analogicky dolní závora a infimum (největší dolní závora)

👁 je jednoznačně určeno, existuje-li ↓

} např. v $(\mathbb{N} \setminus \{0\}, \backslash)$ je $\sup\{a, b\}$ nejmenší společný násobek a $\inf\{a, b\}$ největší společný dělitel. (funguje i pro větší množiny)