13. cvičení z PaSti – 2022-05-16

Tahák

- Mathematica: `CDF[NormalDistribution[0,1], x]`, `InverseCDF[...]`
- Bodový odhad $\hat{\Theta}$ parametru ϑ je:
  - *nevychýlený (nestranný),* pokud $\mathbb{E}(\hat{\Theta}) = \vartheta$, čili $\mathrm{bias}(\Theta) = \mathbb{E}(\hat{\Theta}) - \vartheta = 0$
  - *asymptoticky nevychýlený,* pokud $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\hat{\Theta}_n) = \vartheta$
  - *konzistentní,* pokud $\hat{\Theta}_n \xrightarrow{p} \vartheta$, tedy $\forall \varepsilon > 0 : P(|\hat{\Theta}_n - \vartheta| > \varepsilon) \longrightarrow 0$
- *Výběrový průměr* $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_i X_i$ je nestranný konzistentní odhad $\mathbb{E}(X)$
- *Výběrový rozptyl* $\bar{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (X_i - \bar{X}_n)^2$ je nestr. konz. odhad $\mathrm{var}(X)$
- Střední kvadratická odchylka: $\mathrm{MSE}(\hat{\Theta}) = \mathbb{E}((\hat{\Theta} - \vartheta)^2) = \mathrm{bias}^2(\hat{\Theta}) + \mathrm{var}(\hat{\Theta})$
- *k-tý moment:* $m_k(\vartheta) = \mathbb{E}(X^k)$
- *výběrový k-tý moment* $\widehat{m_k(\vartheta)} = \frac{1}{n}\sum_i X_i^k$ je nestranný konzistentní odhad $m_k(\vartheta)$

Bodové odhady

1. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim Exp(\lambda)$. Označme $\vartheta = 1/\lambda$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

(d) Spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

2. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim U(0, \vartheta)$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

(d) Pro každý z nich spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

(e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?

3. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim Geom(p)$.

(a) Navrhněte bodový odhad p momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad p metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

Testování hypotéz

4. Máme jedno měření $X \sim N(\mu, 1)$. Chceme ověřit hypotézu H_0: $\mu = 5$ s hladinou významnosti $\alpha = 5\,\%$.

(a) Jaký zvolíme kritický obor – množinu měření, ve které hypotézu zamítneme?

(b) Místo jednoho měření jich provedeme n (pochopitelně nezávislých). Jaký bude kritický obor pro $\bar{X}_n$?

(c) Pokud je ve skutečnosti $\mu = 4$ a máme $n = 10$ měření, jaká je pravděpodobnost, že hypotézu nezamítneme?

(d) Nechť X má stále střední hodnotu μ a rozptyl 1, ale není už nutně normální. Co se změní?

5. Podle slibu výrobce bude jeho stroj dělat chyby nejvýše ve $3\,\%$ případů. Z 600 pokusů došlo k chybě v 28 případech. Posuďte slib výrobce (coby nulovou hypotézu) na hladině významnosti $5\,\%$.

(a) Počet chyb modelujte přesně, tj. pomocí binomického rozdělení.

(b) Počet chyb modelujte přibližně pomocí normálního rozdělení (s vhodným μ, σ^2).

K procvičení

6. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim \mathit{Exp}(\lambda)$. Zajímá nás pravděpodobnost p, že $X > 1$ pro $X \sim \mathit{Exp}(\lambda)$. (Připomeňme, že $p = e^{-\lambda \cdot 1}$.)

(a) Navrhněte bodový odhad p (libovolnou metodou), případně několik odhadů.

(b) Prozkoumejte jeho vlastnosti.

7. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim \mathit{Pois}(\lambda)$.

(a) Navrhněte bodový odhad λ momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad λ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

8. Máme náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n \sim U(\vartheta, \vartheta + 1)$.

(a) Navrhněte bodový odhad ϑ momentovou metodou.

(b) Navrhněte bodový odhad ϑ metodou maximální věrohodnosti.

(c) Pro každý z nich zjistěte, zda je nestranný a konzistentní.

(d) Pro každý z nich spočtěte střední kvadratickou odchylku (MSE).

(e) Který odhad je lepší? Napadá vás nějaký ještě lepší?