6. cvičení z PaSti – 2022-03-22

Tahák

- *Sdružená pravděpodobnostní* funkce náhodného vektoru (X, Y) je definována vztahem
$$p_{X,Y}(x, y) = P(X = x \wedge Y = y).$$
- Připomeňte si, jak z ní zjistit „jednorozměrné funkce“ p_X, p_Y neboli *marginální rozdělení* – představujte si je na *okrajích* tabulky sdruženého rozdělení.
- *Poissonovo rozdělení:* $X \sim Pois(\lambda)$: $p_X(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^k/k!$, $\mathbb{E}(X) = \lambda$.

Náhodné veličiny

1. Jste ve skupině s dalšími 500 lidmi. Nechť X je počet lidí, kteří mají stejné narozeniny jako vy. (Narozeniny jednotlivých lidí jsou nezávislé rovnoměrné nahodné. Lidé narození 29. února mají vstup zakázán :))

- Spočítejte $P(X = 1)$, tedy $p_X(1)$.
- Jaké je rozdělení veličiny X?
- Kolik je $\mathbb{E}(X)$?
- Aproximujte $p_X(1)$ pomocí Poissonova rozdělení.

2. Na kroužku máme pět klíčů, jeden z nich je správný, ale my nevíme jaký. Zkoušíme otevřít dveře, X říká, kolikátým pokusem se nám to povede. Jaké rozdělení má X a kolik je $\mathbb{E}(X)$?

- Po každém pokusu se nám kroužek vysmekne, a vybíráme vždy znovu náhodně.
- Vybíráme v náhodném pořadí, ale každý klíč jenom jednou (můžeme si je poznačit).
- Jak se výsledek změní, pokud jsou správně 2 klíče z 10?

3. Nechť X je uniformně náhodná mocnina dvojky z $\{2^a, 2^{a+1}, \ldots, 2^b\}$. Vyjádřete X pomocí uniformního rozdělení na intervalu. Určete $\mathbb{E}(X)$ a $\mathrm{var}(X)$.

Náhodné vektory

4. Ze standardního balíčku s 52 kartami vytáhneme dvě karty. Označíme X počet vytažených es, Y počet králů. Určete sdruženou pravděpodobnostní funkci $p_{X,Y}$ a také marginální pstní funkce p_X, p_Y.

5. Označme X_1, X_2, X_3 výsledky tří nezávislých hodů čtyřstěnnou kostkou (s čísly $1, \dots, 4$).

(a) Jaká je pravděpodobnostní funkce $X = X_1$?

(b) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Y = \max(X_1, X_2)$?

(c) Jaká je pravděpodobnostní funkce $Z = \max(X_1, X_2, X_3)$?

(d) O kolik se zvýší střední hodnota tím, že můžeme házet třikrát? Neboli o kolik je vyšší $\mathbb{E}(Z)$ než $\mathbb{E}(X)$?

Nápověda: Určete napřed $P(Y \le k)$, $P(Z \le k)$.

6. Na kostce padne číslo i s pravděpodobností p_i pro $i = 1, \dots, 6$. Hodíme n-krát a označíme X_i počet hodů, kdy padlo i.

(a) Najděte sdruženou pravděpodobnostní funkci pro n.v. $X_1, \dots, X_n$.

(b) Jaké je marginální rozdělení, tj. rozdělení jednotlivých n.v. X_i?

7. Nechť $X \sim Pois(\lambda)$ a $Y \sim Pois(\mu)$ jsou n.n.v. Dokažte, že $X + Y \sim Pois(\lambda + \mu)$.

K procvičení

8. Uvažme skupinu m manželských párů (tj. celkem $2m$ osob). Předpokládejme, že po deseti letech bude každý z těch $2m$ lidí stále naživu s pravděpodobností p, nezávisle na ostatních. Možnosti rozvodů apod. neuvažujeme, tj. páry jsou neměnné.

Označme L množinu lidí, kteří budou po deseti letech naživu a A jejich počet (tj. $A = |L|$). Dále buď B počet párů, kde budou naživu oba; tj. A, B jsou náhodné veličiny splňující $0 \le A \le 2m$ a $0 \le B \le m$. Pro každé $a = 0, \dots, 2m$ chceme spočítat $\mathbb{E}(B \mid A = a)$.

- Uvážíme jednoho konkrétního člověka. Jaká je pravděpodobnost, že bude po deseti letech naživu, pokud víme, že $A = a$? Jinými slovy, pokud ten člověk je x, jaká je $P(x \in L \mid A = a)$?
- Uvážíme jeden konkrétní manželský pár. Jaká je pravděpodobnost, že budou oba naživu, pokud víme, že $A = a$?
- Vyjádřete B jako součet m vhodných indikátorových n.v.
- Spočítejte $\mathbb{E}(B \mid A = a)$. (Hint: Linearita střední hodnoty platí i pro podmíněnou střední hodnotu.)
- Jaké je rozdělení n.v. A? (Buď ho pojmenujte, nebo napište pravděpodobnostní funkci, tj. určete $P(A = a)$.)
- Pro zvolenou a-prvkovou množinu lidí M: jaká je pravděpodobnost, že je to přesně množina přeživších? Neboli kolik je $P(L = M)$? A kolik $P(L = M \mid A = a)$?
- Pro $m = 10$ a $a = 4$ ověřte výsledek samplováním v libovolném programovacím jazyce.