4. cvičení z PaSti – 2022-03-08

Přehled diskrétních rozdělení

- *alternativní (Bernoulliho):*
  - Házíme mincí. Panna nebo orel?
  - $X \sim Bern(p)$: $p_X(1) = p$, $p_X(0) = 1 - p$
  - $\mathbb{E}(X) = p$
- *binomické:*
  - Házíme n mincemi. Kolikrát padl orel?
  - $X \sim Bin(n, p)$: $p_X(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pro $0 \leq k \leq n$
  - $\mathbb{E}(X) = np$
- *geometrické:*
  - Házíme mincí, dokud nepadne orel. Kolikrát hodíme? (neboli tak dlouho se chodí se džbánem pro vodu…)
  - $X \sim Geom(p)$: $p_X(k) = p(1-p)^{k-1}$ pro $k \geq 1$
  - $\mathbb{E}(X) = 1/p$
- *Poissonovo:*
  - Kolik černých koček přeběhne denně přes cestu?
  - $X \sim Pois(\lambda)$: $p_X(k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \cdot \lambda^k / k!$
  - $\mathbb{E}(X) = \lambda$

Náhodné veličiny

1. Prokop hází basketbalovým míčem na koš, v každém pokusu má pravděpodobnost zásahu $p = 1/10$, pokusy jsou nezávislé. Skončí po prvním zásahu. Označme X celkový počet hodů.

(a) Jaká je $P(X > k)$?

(b) Jaké je rozdělení X? Tj. určete pravděpodobnostní funkci p_X, tj. pro každé x určete $P(X = x)$.

(c) Jaká je $P(X \geq 10 \mid X \geq 5)$?

(d) Jaká je $\mathbb{E}(X)$?

2. Pokračování z minulé úlohy: označme $Y = X \bmod 2$, tj. $Y = 0$, pokud je X sudé, jinak $Y = 1$. Určete rozdělení Y.

3. Nechť $X \sim Bin(m, p)$ a $Y \sim Bin(n, p)$ jsou n.n.v (nezávislé náhodné veličiny). Dokažte, že $X + Y \sim Bin(m + n, p)$.

4. N.n.v. $X_1, \ldots, X_n$ mají geometrické rozdělení s parametry $p_1, \ldots, p_n$. Jaké je rozdělení $\min(X_1, \ldots, X_n)$?

5. Nechť $X = X_1 + \cdots + X_n$, kde pro každé i je $X_i \sim Bern(p)$. Pokud jsou veličiny $X_1, \ldots, X_n$ nezávislé, říkali jsme si na přednášce, že $X \sim Bin(n, p)$ (zatím bez definice nezávislých veličin ...). Ukažte na příkladu, že pokud omezení na nezávislost neuvedeme (tj. chceme jen $X_i \sim Bern(p)$), tak X může mít i jiné rozdělení.

6. Nechť X má uniformní[1] rozdělení na množině $\{a, a + 1, a + 2, \ldots, b\}$ (pro celá čísla $a < b$). Určete $\mathbb{E}(X)$.

7. Filip má školu 2 km daleko od domu. Každé ráno se podívá na oblohu. Když prší (pravděpodobnost 0.6), půjde do školy pěšky rychlostí 5 km/h. Jinak jede na kole rychlostí 10 km/h. Jaká je průměrná rychlost, kterou cestuje do školy? Jaký je průměrný čas, který cesta trvá?

8. V pytlíku N bonbónů, z nichž K je dobrých. Náhodně vytáhneme dva, označíme X počet dobrých vytažených bonbónů.

(a) Určete $\mathbb{E}(X)$.

(b) Můžete i napřed řešit pro tažení jen jednoho bonbónu.

(c) Jak se jmenuje rozdělení n.v. X?

(*) A co když vytáhneme tři, čtyři, ..., n bonbónů?

Bonusy

9. *(Kasino v St. Petěrburgu)* Házíme opakovaně mincí. Pokud poprvé padla panna v n-tém hodu, dostaneme odměnu 2^n rublů. Kolik byste byli ochotní zaplatit za účast v této hře?

[1] Tím se myslí, že všechny hodnoty z dané množiny mají stejnou pravděpodobnost. Někdy též rovnoměrné.