LA2 – cvičení 13 – 2022-05-18

Tahák

- *Bilineární forma* $b : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:
  - lineární v každé proměnné zvlášť
  - symetrická, pokud $b(u, v) = b(v, u)$
  - lze zapsat jako $b(u, v) = u^{\mathrm{T}} A v$.
- *Kvadratická forma* $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, indukovaná $q(x) = b(x, x)$ pro bilineární formu b. (BÚNO je b symetrická.)
- *Přechod mezi bázemi* pro kvadratické formy: $A = S^{\mathrm{T}} A' S$.
- *Polární rozklad* kvadratické formy: $A = S^{\mathrm{T}} \Lambda S$, kde Λ je diagonální s $+1$, -1, 0 na diagonále. Sylvestrův zákon setrvačnosti: až na pořadí jednoznačné.
- *Signatura* kvadratické formy: (p, m, n) – počet $+1$, -1 a 0 v polárním tvaru.

Bilineární formy

1. Ve vektorovém prostoru $\mathbb{R}^3$ mějme následující zobrazení. Jsou to bilineární formy? Pokud ano, najděte maticovou reprezentaci.

   a) $f(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$
   b) $f(x, y) = x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2 + y_3$
   c) $f(x, y) = (x_1 + x_2 + x_3)(y_1 + y_2 + y_3)$
   d) $f(x, y) = (x_1 + y_1)(x_2 + y_2)(x_3 + y_3)$
   e) $f(x, y) = \sum_{i,j=1}^{3} \max(i, j) x_i y_j$

Kvadratické formy

2. Mějme matici

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Najděte symetrickou matici B takovou, že $x^{\mathrm{T}} B x = x^{\mathrm{T}} A x$ pro všechna x:

   a) nad tělesem $\mathbb{R}$
   b) nad tělesem $\mathbb{Z}_5$
   c) nad tělesem $\mathbb{Z}_2$

3. Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi $\mathbb{R}^4$ vyjádření

$$g(x) = 2x_1^2 + 2x_1 x_2 - x_2^2 - 2x_2 x_4 - x_4^2.$$

   Najděte její vyjádření vzhledem k bázi

$$((1, 1, 1, 1)^{\mathrm{T}}, (1, 1, 1, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 1, 0, 0)^{\mathrm{T}}, (1, 0, 0, 0)^{\mathrm{T}}).$$

Polární rozklad a signatura

4. Určete signaturu formy dané maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

5. Najděte polární bázi reálné kvadratické formy $g((x,y,z)^{\mathrm{T}}) = 2xz - 2xy$ a určete její signaturu.

6. Kvadratická forma má (vzhledem ke kanonické bázi) vyjádření $g((w,x,y,z)^{\mathrm{T}}) = 2w^2 + 2wx - x^2 - 2xz - z^2$. Určete její signaturu.

7. V závislosti na parametru $a \in \mathbb{R}$ určete signaturu kvadratických forem s těmito maticemi:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & a & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Kvadriky

Plochy v R^n, které jsou grafem polynomu stupně 2. Ekvivalentně:

$$f(x) = x^{\mathrm{T}} A x + b^{\mathrm{T}} x + c.$$

8. Nakreslete si všechny typy kvadrik v $\mathbb{R}^2$. U kvadratického členu $x^{\mathrm{T}} A x$ uvažujte všechny možné signatury, u b a c všechna možná znaménka.

9. Nakreslete si všechny typy kvadrik v $\mathbb{R}^3$.