LA2 – cvičení 12 – 2022-05-04

Tahák

Algoritmus CHOLESKÉHOROZKLAD
Vstup: Pozitivně semi-definitní matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1. $L \leftarrow 0_n$
2. Pro $k = 1, \dots, n$: ◁ *vyplňujeme k-tý sloupec*
3. $\quad t \leftarrow A_{kk} - \sum_{j<k} L_{kj}^2$
4. $\quad$ Pokud $t < 0$, ohlásíme neúspěch.
5. $\quad L_{kk} \leftarrow \sqrt{t}$ ◁ *prvek na diagonále*
6. $\quad$ Pro $i = k+1, \dots, n$: ◁ *zbytek sloupce*
7. $\qquad L_{ik} \leftarrow (A_{ik} - \sum_{j<k} L_{ij} L_{kj}) \,/\, L_{kk}$

Výstup: Dolní trojúhelníková matice $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ taková, že $A = LL^{\mathrm{T}}$

Pro pozitivně definitní A je L jednoznačná a má kladnou diagonálu.
Pro pozitivně semidefinitní jednoznačnost neplatí, diagonála je nezáporná.

Choleského rozklad

1. Spočítejte Choleského rozklad matic:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 13 & 2 \\ 2 & 2 & 21 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Jsou pozitivně (semi)definitní?

2. Využijte Choleského rozklad k výpočtu A^{-1} pro matici A výše.

3. Využijte Choleského rozklad k řešení soustavy $Mx = b$ pro:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 0 \\ -2 & 13 & -13 & 9 \\ 5 & -13 & 42 & -11 \\ 0 & 9 & -11 & 14 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -3 \\ 15 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

4. Spočítejte Choleského rozklad matice:

$$K_n = \begin{pmatrix} I_n & I_n \\ I_n & 5I_n \end{pmatrix}.$$

Další vlastnosti

5. Nad symetrickými maticemi z $\mathbb{R}^{n\times n}$ definujeme relaci $\preceq$ předpisem $A \preceq B \equiv B - A$ je pozitivně semidefinitní. Ukažte, že $\preceq$ je relace částečného uspořádání.