LA2 – cvičení 11 – 2022-04-27

Tahák

- Reálná symetrická matice A je *pozitivně definitní* $(A \succ 0) \equiv \forall x : x^{\mathrm{T}}Ax > 0$.
  Je *pozitivně semidefinitní* $(A \succeq 0) \equiv \forall x : x^{\mathrm{T}}Ax \geq 0$.
- Ekvivalentní s $A \succ 0$:
  - všechna vlastní čísla jsou kladná
  - $\exists U : \operatorname{rank}(U) = n \wedge U^{\mathrm{T}}U = A$
  - $A = \begin{pmatrix} \alpha & a^{\mathrm{T}} \\ a & \bar{A} \end{pmatrix} \wedge \alpha > 0 \wedge \bar{A} - \frac{aa^{\mathrm{T}}}{\alpha} \succ 0$
  - při eliminaci A *shora dolů* jsou všichni pivoti kladní
  - *Sylvesterovo kriterium:* $\forall i > 0 : \det A[\,:i, :i] > 0$

Hraní si s definicí

1. Rozhodněte, zda $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \succ 0$
2. Může mít pozitivně definitní matice na diagonále záporná čísla? A nuly?
3. Dokažte, že pro $A, B \succ 0$ je $A + B \succ 0$. Co když jedna nebo obě matice jsou jen semidefinitní?
4. Dokažte, že pro $A \succ 0$ a $\alpha > 0$ je $\alpha A \succ 0$.
5. Dokažte, že pokud $A \succ 0$, pak A je regulární a $A^{-1} \succ 0$.
6. Najděte matici, která je pozitivně semidefinitní, ale není pozitivně definitní.

Testování pozitivní definitnosti

7. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
8. $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ -2 & 10 & 1 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$
9. Která z kriterií je možné upravit na testování semidefinitnosti (například výměnou ostré nerovnosti za neostrou)?

Další vlastnosti

10. Dokažte, že pro každou pozitivně definitní $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ existuje její *druhá odmocnina:* matice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ taková, že $B^2 = A$. Jdou odmocnit i jiné matice?
11. Dokažte, že symetrická matice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ je pozitivně definitní právě tehdy, když zobrazení $\langle x, y \rangle = x^{\mathrm{T}}Ay$ je skalární součin.
12. Dokažte, že pokud $A \succ 0$, pak $A^k \succ 0$ pro všechna $k > 0$.
13. Najděte všechny symetrické matice A takové, že jak A, tak $-A$ jsou pozitivně semidefinitní.