LA2 – cvičení 10 – 2022-04-20

Vlastní čísla grafů

Mějme neorientovaný graf, jehož všechny vrcholy mají stupeň d. Grafu přiřadíme matici $P = A/d$, kde A je matice sousednosti. Matice P je reálná symetrická, takže má reálná vlastní čísla $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_k$. Těm se říká vlastní čísla grafu.

1. Najděte vlastní čísla a vektory pro matici grafu C_3.
2. Najděte vlastní čísla a vektory pro matici grafu C_4.
3. Dokažte, že každý graf má vlastní číslo 1.
4. Dokažte, že vlastní číslo 1 má násobnost 1 právě tehdy, když je graf souvislý. (Silnější verze: násobnost jedničky je rovna počtu komponent souvislosti.)
5. Dokažte, že graf má vlastní číslo -1 právě tehdy, když je bipartitní.
6. Dokažte, že všechna vlastní čísla grafu leží mezi -1 a 1.
7. Jak vypadají vlastní čísla a vektory grafu K_n?

8.* Jak vypadají vlastní čísla a vektory grafu C_n?

Náhodné procházky

Po grafu s maticí P budeme chodit náhodně: začneme v nějakém počátečním vrcholu a pak si v každém kroku rovnoměrně náhodně vybereme hranu, po které se přesuneme. Nechť u_i je vektor, který udává *pravděpodobnostní rozdělení* po i-tém kroku procházky – jeho j-tá složka tedy udává pravděpodobnost, že se zrovna nacházíme v j-tém vrcholu.

9. Ukažte, že $u_{i+1} = Pu_i$.
10. Jak vypadají vektory u_i, pokud se náhodně procházíme po C_3.
11. Jak vypadají vektory u_i, pokud se náhodně procházíme po C_4?
12. Dokažte, že pokud graf je souvislý a není bipartitní, vektory u_i konvergují k rovnoměrnému rozdělení na všech vrcholech grafu. (Tady se hodí, že symetrická reálná matice má *ortonormální* bázi z vlastních vektorů.)