LA2 – cvičení 7 – 2022-03-30

Tahák

- Pokud $Ax = \lambda x$ pro $x \neq o$, pak λ nazveme *vlastním číslem* matice A a x je k němu příslušný *vlastní vektor (invariantní směr).*
- Množině všech vlastních čísel se říká *spektrum matice.*
- $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n)$ je *charakteristický polynom* matice A. Vlastní čísla jsou jeho kořeny $\Rightarrow$ je jich n (včetně *algebraických* násobností).
- Pokud je λ vlastní číslo, pak $x \in \ker(A - \lambda I_n)$ jsou příslušné vlastní vektory. Dimenze jádra je *geometrická násobnost* vlastního čísla.
- A je singulární $\Leftrightarrow$ jejím vlastním číslem je 0.
- Trojúhelníková matice: prvky na diagonále jsou vlastní čísla.
- $\det A = \lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$
- $\operatorname{tr} A = \lambda_1 + \ldots + \lambda_n$
- A^{-1} má vlastní čísla $\lambda_1^{-1}, \ldots, \lambda_n^{-1}$ a stejné vlastní vektory.

Spektrum konkrétních matic

1. Jak vypadají vlastní čísla a vlastní vektory jednotkové matice a matice ze samých nul?

2. Následující matice reprezentují geometrická zobrazení v rovině. Najděte jejich vlastní čísla a příslušné vlastní vektory. Pokuste se je geometricky vysvětlit.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Určete charakteristický polynom a nejděte vlastní čísla a odpovídající vlastní vektory následující matice nad $\mathbb{C}$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

4. Najděte vlastní čísla a vektory matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti spektra

5. Matice A má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ a k nim příslušné vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$. Dokažte, že platí:

   a) Matice A^2 má vlastní čísla $\lambda_1^2, \dots, \lambda_n^2$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$.

   b) Matice αA má vlastní čisla $\alpha\lambda_1, \dots, \alpha\lambda_n$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$.

   c) Matice $A + \alpha I_n$ má vlastní čísla $\lambda_1 + \alpha, \dots, \lambda_n + \alpha$ a vlastní vektory $x_1, \dots, x_n$.

   d) Matice A^{T} má vlastní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, ale vlastní vektory obecně jiné.

Matice společnice

6. Pro polynom $p(t) = t^n + \alpha_{n-1}t^{n-1} + \alpha_{n-2}t^{n-2} + \ldots + \alpha_0 t^0$ definujeme matici

$$S_p = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -\alpha_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -\alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}.$$

   Dokažte, že charakteristický polynom matice S_p je roven p.

7.* Mějme lineární rekurenci řádu k:

$$x_n = \beta_1 x_{n-1} + \ldots + \beta_k x_{n-k}$$

   s počátečními podmínkami $x_0 = \gamma_0, \dots, x_{n-1} = \gamma_{n-1}$. Najděte matici R takovou, že $R \cdot (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1})^{\mathrm{T}} = (x_{i+1}, \dots, x_{i+k})^{\mathrm{T}}$ pro všechna i. Jak R souvisí s maticí z minulého příkladu?