LA2 – cvičení 6 – 2022-03-23

Tahák

- A^{ij} je matice vzniklá z A smazáním i-tého řádku a j-tého sloupce.
- *Laplaceův rozvoj* podle i-tého řádku: $\det A = \sum_j (-1)^{i+j} A_{ij} \det A^{ij}$.
- Jelikož $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, lze analogicky rozvíjet i podle sloupce.
- *Cramerovo pravidlo* pro řešení soustavy rovnic $Ax = b$: $x_i = \det B^i / \det A$, kde B_i je matice vzniklá z A výměnou i-tého sloupce za vektor b.
- *Adjungovaná matice:* $(\operatorname{adj} A)_{ij} = (-1)^{i+j} \det A^{ij}$.
- Pro regulární matici A platí: $A^{-1} = \operatorname{adj} A / \det A$
- *Laplaceova matice* L neorientovaného grafu $G = (\{1, \ldots, n\}, E)$ je matice $n \times n$ taková, že $L_{ij} = -1$ pro $\{i, j\} \in E$, $L_{ii} = \deg i$ a všude jinde jsou 0.
- Počet koster grafu je roven $\det L^{ii}$ pro libovolné i.

Determinanty

1. Čísla 697, 476 a 969 jsou dělitelná 17. Bez přímého výpočtu nahlédněte, že determinant $\begin{vmatrix} 6 & 9 & 7 \\ 4 & 7 & 6 \\ 9 & 6 & 9 \end{vmatrix}$ je dělitelný 17.

2. Spočítejte determinanty tridiagonálních matic $n \times n$:

$$X_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad Y_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Dokažte následující vztah pro *Vandermondův determinant:*

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} \\ 1 & x_3^1 & x_3^2 & \ldots & x_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i).$$

Cramerovo pravidlo

4. Řešte soustavu s parametry $a, b, c \neq 0$:

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix}.$$

Adjungovaná matice

5. Spočítejte inverzi matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ pomocí adjungované matice.
6. Rozhodněte, zda pro každé dvě matice $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ platí $\operatorname{adj}(AB) = \operatorname{adj}(BA)$.
7. Z věty o vyjádření A^{-1} pomocí $\operatorname{adj} A$ odvoďte Cramerovo pravidlo.
8. Naopak pomocí Cramerova pravidla vyjádřete A^{-1}. Vyjde totéž jako pomocí $\operatorname{adj} A$?

Počet koster

9. Spočítejte, kolik koster má úplný graf K_n.
10. Spočítejte, kolik koster má úplný bipartitní graf $K_{m,n}$.

Algoritmy

11. Jakou časovou složitost má Gaussova eliminace?
12. Jak rychle umíte spočítat determinant, inverzní matici a adjungovanou matici?
13. Srovnejte časovou složitost řešení regulární soustavy lineárních rovnic eliminací, Cramerovým pravidlem a pomocí adjungované matice?