LA2 – cvičení 5 – 2022-03-16

Tahák

- *Znaménko* permutace π na $[n]$: $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^{n-c}$, kde c je počet cyklů.
- *Determinant* čtvercové matice A:

$$\det A = \sum_{\pi} \left(\operatorname{sgn}\pi \cdot \prod_{1\le i\le n} A_{i,\pi i} \right),$$

  přičemž sčítáme přes všechny permutace π na $[n]$. (Věže na šachovnici …)
- Determinant je lineární funkcí řádku.
- Eliminace:
  - Prohození řádků změní znaménko determinantu.
  - Vynásobení řádku číslem α: $\det A' = \alpha \det A$.
  - Dva stejné řádky nebo nulový řádek způsobí nulový determinant.
  - Přičtení řádku k jinému nezmění determinant.
- A je regulární $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.
- $\det A^{\mathrm{T}} = \det A$, $\det(AB) = \det A \cdot \det B$, $\det A^{-1} = 1/\det A$.

Znaménka permutací

1.
$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

2.
$$\operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ n & n-1 & n-2 & \dots & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Co říká determinant permutační matice?

4. Dokažte, že pokud lze permutaci π složit z t *transpozic* (prohození dvojic), pak $\operatorname{sgn}\pi = (-1)^t$.

Determinanty

5.
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

6.
$$\begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$$

7.

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 \\ \vdots & \iddots & \iddots & 0 \\ 0 & \iddots & \iddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

8. Pro jaká a je následující matice regulární?

$$\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ a-1 & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

9. Vyřešte předchozí cvičení v tělesech $\mathbb{Z}_3$ a $\mathbb{Z}_2$.

10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & x \\ 1 & 1 & x & 1 \\ 1 & x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Blokové matice

11. Rozhodněte, zda platí $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$.

12. Rozhodněte, zda platí $\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det A \cdot \det B$.

13. Rozhodněte, zda platí $\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det A \cdot \det D - \det B \cdot \det C$.

Různé

14. Dokažte, že A je regulární, právě když A^2 je regulární.

15. Matice $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ je *antisymetrická,* pokud $A^{\mathrm{T}} = -A$. Dokažte, že pro liché n je každá antisymetrická matice singulární.

16. Najděte matici 3×3 složenou z 1 a -1, která má maximální determinant.

17. Dokažte, že determinant matice $n \times n$ složené z 1 a -1 je dělitelný 2^{n-1}.

18. *Permanent* matice definujeme stejně jako determinant, jen všechny permutace započítáváme kladně.

    a) Které vlastnosti determinantu má i permament?

    b) Mějme bipartitní graf s partitami $\{x_1, \dots, x_n\}$ a $\{y_1, \dots, y_n\}$. *Bipartitní matice sousednosti* je nula-jedničková matice B tvaru $n \times n$ taková, že $B_{ij} = 1 \Leftrightarrow \{x_i, y_j\}$ je hrana. Dokažte, že permanent matice B je roven počtu perfektních párování v grafu.